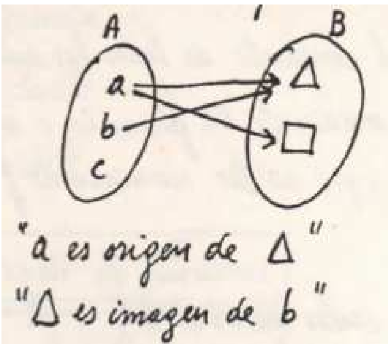
FUNCIONES REALES. FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS.

1. CONCEPTO DE FUNCIÓN.

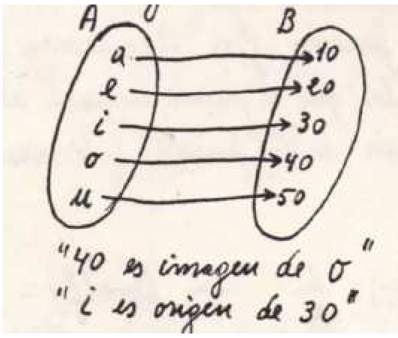
Llamamos correspondencia entre dos conjuntos A y B a cualquier forma de asignar a algunos o todos los elementos de A otros elementos de B.

- Al conjunto A se le llama conjunto inicial de la correspondencia.
- Al conjunto B se le llama conjunto final de la correspondencia.
- Cada elemento del conjunto A que tiene asignado alguno de B se llama origen.
- Cada elemento del conjunto B que ha sido asignado a alguno de A se llama imagen.

Ejemplo 1:

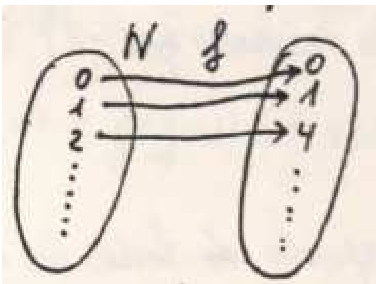


Ejemplo 2:

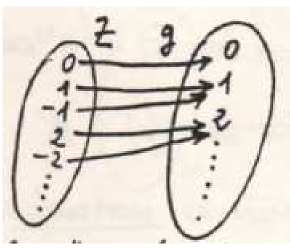


Llamaremos función a cualquier correspondencia establecida entre dos conjuntos de números y de forma que a cada número del conjunto inicial se le asigne uno y sólo un número del conjunto final.

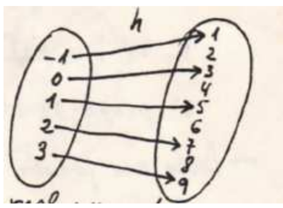
Ejemplo 1:



Ejemplo 2:



Ejemplo 3:



Regla: "a cada número se le asigna su cuadrado"

Regla: "a cada número se le asigna su valor absoluto"

Regla: " a cada origen se le asigna su doble mas 3"

- Para llamar a una función se suele emplear una letra. Hablamos de las funciones f,g,h,…
- Para llamar a un origen cualquiera se utiliza una letra cualquiera, por ejemplo x, a la que se le llama variable independiente.
- Para llamar a una imagen cualquiera se utiliza una letra cualquiera, por ejemplo y, a la que se llama variable dependiente.
- Para expresar que, en la función f, un número "b" del conjunto final es imagen de un número "a" del conjunto inicial, pondremos f(a)=b, que leeremos "f de (a) igual a (b)".
- A veces, la regla de asignación de una función puede expresarse mediante una fórmula que nos dice como hallar la imagen f(x) de un origen cualquiera x. Esta fórmula puede expresarse de varias formas:

Ejemplo 1:	Ejemplo 2:	Ejemplo 3:
$x \xrightarrow{f} x^2$	$x \xrightarrow{g} \lvert x \rvert$	$x \xrightarrow{h} 2x+3$
ó	ó	ó
$f(x) = x^2$	$g(x) = \lvert x \rvert$	$h(x) = 2x+3$
ó	ó	ó
$y = x^2$	$y = \lvert x \rvert$	$y = 2x+3$

En este caso solo veremos funciones donde los conjuntos inicial y final son conjuntos de números reales. Estas funciones se llaman funciones reales de variable real, aunque nosotros los llamaremos simplemente funciones.

2. DOMINIO Y RECORRIDO

Dada una función f(x) llamaremos dominio suyo al conjunto de todos los números reales a los que se pueden asignar otro número real mediante la fórmula o regla de asignación de usa función. Se simboliza Dom(f), que se lee dominio de f.

Ejemplos:

Si $f(x) = \dfrac{1}{x} \rightarrow Dom(f) = \{$ todos los números reales menos el 0 $\} = \mathbb{R} - \{0\}$

Si $g(x)=2x^3+5 \to Dom(g)=\mathbb{R}$

Si $h(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-9} \to Dom(h)=\mathbb{R}-\{3,-3\}$

Si $r(x)=+\sqrt{x+7} \to Dom(r)=\{$ números reales mayores o iguales que -7 $\}$ =

= $[-7,+\infty)$

Si $p(x)=3x+\sqrt[5]{x+8} \to Dom(p)=\mathbb{R}$ (por que tiene raíz impar).

Dada una función $f(x)$ llamaremos recorrido suyo al conjunto de todos los números reales que son imágenes de algún otro número real en esa función. Se simboliza Rec(f), que se lee recorrido de f.

Ejemplos:

Si $f(x)=|x| \to \mathrm{Re}\,c(f)=\{$ números reales no negativos $\}$ = $\mathbb{R}^+\cup\{0\}$

Si $g(x)=3x^2+5 \to \mathrm{Re}\,c(g)=[5,+\infty)$

Si $h(x)=-2x^4 \to \mathrm{Re}\,c(h)=\mathbb{R}^-\cup\{0\}$

Si $r(x)=4x-3 \to \mathrm{Re}\,c(r)=\mathbb{R}$

Si $p(x)=\dfrac{6}{x} \to \mathrm{Re}\,c(p)=\mathbb{R}-\{0\}$

3. OPERACIONES ENTRE FUNCIONES REALES

3.1. Suma, resta, producto y cociente.

Por analogía con los números reales se definen estas operaciones entre funciones.

Dadas las funciones f y g.

Llamamos función suma f+g a la que cumple (f+g)(x)=f(x)+g(x);

Llamamos función diferencia f-g a la que cumple (f-g)(x)=f(x)-g(x);

Llamamos función producto $f\cdot g$ a la que cumple $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$;

Llamamos <u>función cociente</u> $\frac{f}{g}$ a la que cumple $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

<u>Ejemplo:</u>

Si $f(x)=x+2$ y $g(x)=x^2$:

La suma será la función de fórmula: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x+2+x^2$

La diferencia será la función de fórmula: $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x+2-x^2$

El producto será la función de formula: $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(x+2)\cdot x^2$

El cociente será la función de fórmula: $(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{(x+2)}{x^2}$

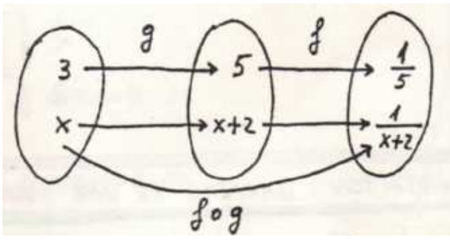
3.2. Composición de funciones.

Dadas las funciones f y g llamamos $f\circ g$ que se lee "función compuesta con g" a la función que cumple $(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)$.

<u>Ejemplo:</u>

Si $f(x)=\frac{1}{x}$ y $g(x)=x+2$

$$f\circ g(x)=f(g(x))=f(x+2)=\frac{1}{x+2}$$



La composición de funciones no es una operación conmutativa. Así, en el ejemplo anterior:

$$g\circ f(x)=g(f(x))=g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+2\neq\frac{1}{x+2}$$

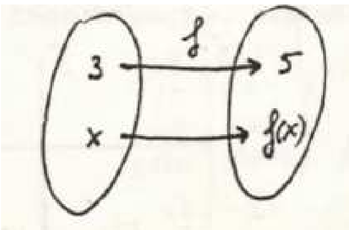
La función llamada identidad, que tiene de fórmula $i(x)=x$ hace de elemento neutro de la composición de funciones. Es decir $f\circ i=f$ e $i\circ f=f$.

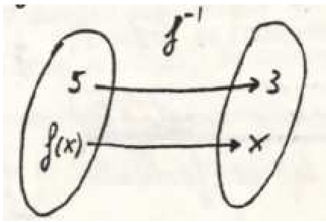
4. FUNCIÓN INVERSA

Dada una función $f(x)$ llamamos correspondencia inversa suya a aquella que hace corresponder a cada número que es imagen en f, su origen. Se simboliza por f^{-1}.

Ejemplo:

Si entonces

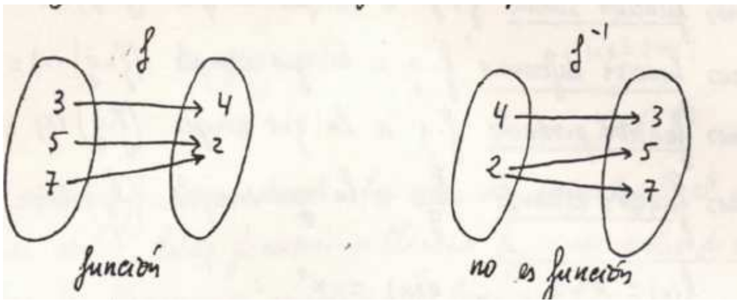




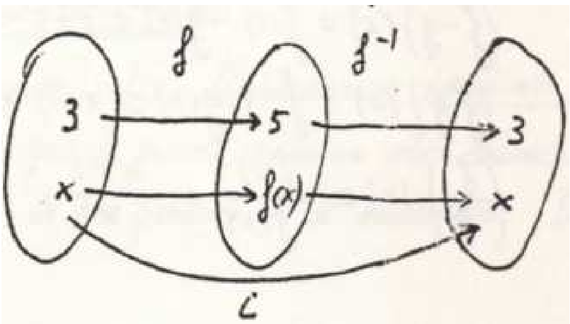
Es decir $f^{-1}(f(x))=x$

- Si en f alguna imagen tiene más de un origen, la correspondencia no será una función.

Ejemplo:



- Si en f cada imagen tiene sólo un origen, entonces f^{-1} también será función y se cumple $f^{-1}\circ f=i$ y $f\circ f^{-1}=i$



Ejemplo

Calcula la función inversa de la $f(x)=2x-5$.Debe ser $f\circ f^{-1}=i$, es decir

$$f(f^{-1}(x))=x= 2f^{-1}(x)-5=x \rightarrow 2f^{-1}(x)=x+5 \rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+5}{2}$$

5. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN.

Si, para cada valor de la variable independiente x del dominio de una función f, representamos el punto $(x, f(x))$ en un sistema de coordenadas cartesianas, aparece un conjunto de puntos que se dice representación gráfica de la función. En las funciones reales que nosotros vamos a estudiar estos conjuntos de puntos forman líneas diversas.

6. FUNCIONES POLINÓMICAS.

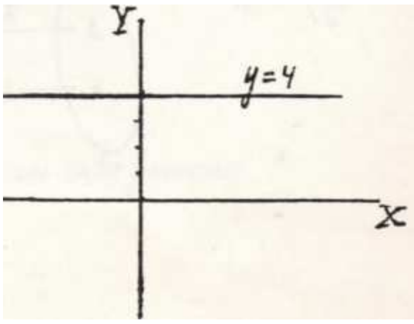
Son aquellas cuya fórmula es $f(x)=$polinomio en la variable x.

Ejemplos:

$$f(x)=3x^2+6x-1 \;\; ; \;\; y=x+2 \;\; ; \;\; y=x^3-3x$$

Su dominio es todo $\mathbb{R}$ y algunos casos particulares ya estudiados en el curso anterior son:

6.1. Funciones constantes.



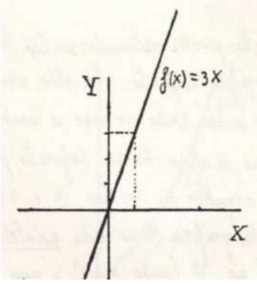
Son las funciones $f(x)=k$ ó $y=k$

Ejemplo:

$f(x)=4$ ó $y=4$

Sus gráficas son rectas horizontales.

6.2. Funciones de proporcionalidad



Son las de fórmula $f(x)=mx$ ó $y=mx$

Ejemplo: $f(x)=3x$ ó $y=3x$

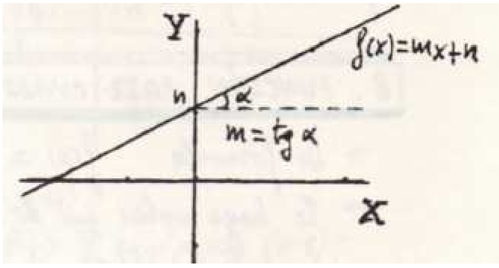
- Sus gráficas son rectas que pasan por el centro de coordenadas. Recuerda que el coeficiente m se llama pendiente y es la tangente del ángulo que forman la recta con la dirección horizontal hacia la derecha.

6.3. Funciones afines.

Son las de fórmulas $f(x) = mx + n$ ó $y = mx + n$

Ejemplo: $f(x) = 2x + 1$ ó $y = 2x + 1$

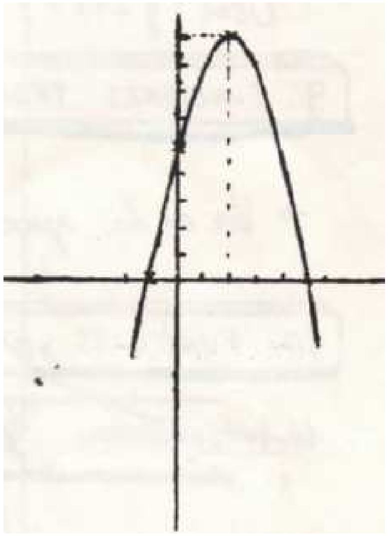
- Sus gráficas son rectas oblicuas que cortan al eje Y en n y tiene pendiente m.



6.4. Funciones cuadráticas.

Son las de fórmula: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Sus gráficas son parabólicas de eje vertical. Debe recordar que:



- Su vértice está en $x = \frac{-b}{2a}$
- Si a es positivo la parábola es cóncava, es decir abierta hacia arriba.
- Si a es negativo la parábola es convexa, es decir abierta hacia abajo.

Ejemplo:

$f(x) = -x^2 + 4x + 5$;

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2$

	x	y
Vértice $\rightarrow$	2	9
Corte eje y $\rightarrow$	0	5
Corte eje x $\rightarrow$	-1	0
	5	0

7. FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA.

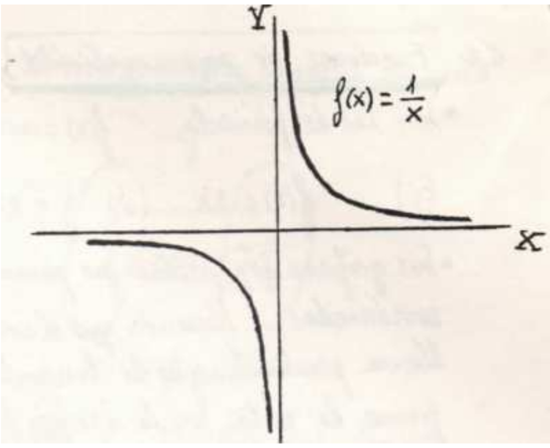
Son las de fórmulas $f(x) = \frac{k}{x}$ ó $y = \frac{k}{x}$, donde k es una constante.

Ya que no podemos dividir por cero $\rightarrow Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

La más sencilla es $y = \frac{k}{x}$ y vamos a estudiarla con tablas de valores:

Observamos en las tablas que, al dar valores a x próximos a cero positivos, los valores de y se hacen cada vez mayores. Si son próximos a cero pero negativos la y resulta de valor absoluto muy grande.

También, al dar a x valores grandes positivos y negativos los valores de y se hacen próximos a cero.



Estos puntos obtenidos en las tablas

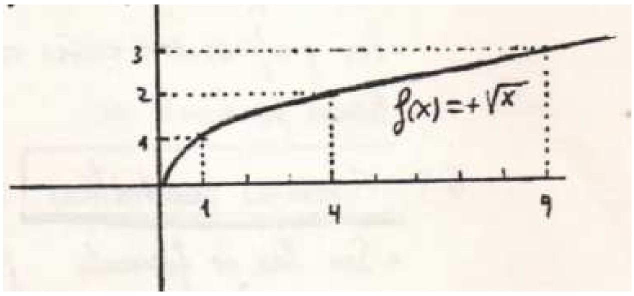
X	y
1	1
0,5	2
0,2	5
0,1	10
0,01	100
-1	-1
1-0,5	-2
-0,2	-5
-0,01	-100
-0,001	-1000

x	Y
2	0,5
4	0,25
10	0,1
100	0,01
1000	0,001
-2	-0,5
-10	-0,1
-100	-0,01
-1000	-0,001
-10000	-0,0001

producen la gráfica adjunta. En ella vemos que la gráfica se acerca cada vez más a ambos ejes, a medida que se aleja hacia el infinito por el lado positivo y negativo de los ejes X e Y. Decimos que esta gráfica tiene una asíntota vertical, que es el eje Y (recta x=0) y una asíntota horizontal, que es el eje X (recta y=0).

8. FUNCIÓN RAIZ CUADRADA.

De fórmula $f(x) = +\sqrt{x}$



Te hago notar que de los dos posibles valores , uno positivo y otro negativo, que puede tomar la raíz cuadrada se ha elegido aquí solo uno.

Si no lo hubiéramos hecho, no tendríamos una función, ya que para un mismo valor de x (origen) tendríamos dos valores pesa y (imágenes).

$$Dom(y = +\sqrt{x}) = \{ \text{ números positivos y el cero } \} = [0, +\infty)$$

9. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

Ver apuntes de trigonometría.

10. FUNCIONES EXPONECIALES Y ECUACIONES EXPONENCIALES.

10.1. Definición y propiedades de las potencias.

Definiciones	$a^n = a \cdot a \cdot .... \cdot a$ (n veces)	Para n entero positivo
	$a^0 = 1$	
	$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$	Para exponentes negativos
	$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$	Para exponentes fraccionarios

Propiedades	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \dfrac{b^n}{a^n}$
	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\left(a^m\right)^p = a^{m \cdot p}$

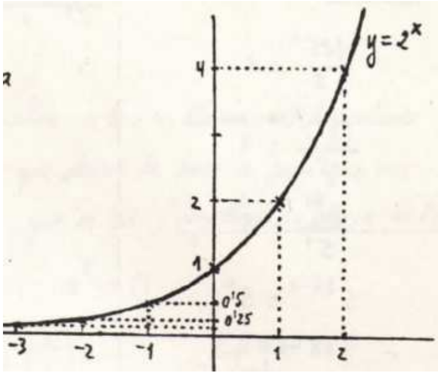
10.2. Funciones exponenciales.

Son aquellas que llevan en su fórmula la variable independiente en un exponente. Las más simples son las de la forma $y = a^x$, donde "a" es una constante positiva.

10.2.1 Funciones $y = a^x$ con a>1

Su domino es todo $\mathbb{R}$.

Como ejemplo, vamos a estudiar, mediante una tabla, la función $y = 2^x$



X	Y
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
-1	0,5
-2	0,25
-3	0,125
-10	$2^{-10}=\frac{1}{2^{10}}=0,000976...$
-10	$2^{-20}=\frac{1}{2^{20}}=0,00000953...$

Como vemos:

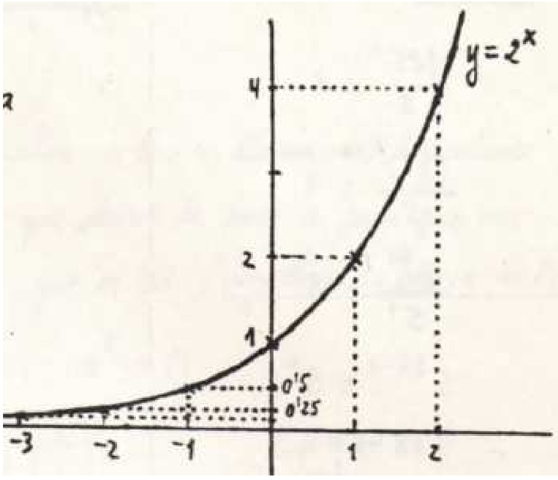
- Su recorrido es $(0,+\infty)$;
- La gráfica corta al eje Y en el punto $(0,1)$;
- El valor de f(x) crece al crecer la x, y más lento cuanto mayor es x;
- El eje x es asíntota por la izquierda.

10.2.2. Funciones $y=a^x$ con 0<a<1

Su dominio es todo

Como ejemplo, vamos a estudiar, mediante una tabla , la función $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ó $y=(0,5)^x$

x	y
0	1
1	0,5
2	0,25
3	0,125
4	0,0625
10	0,000976...
20	0,000000953...



-1	2
-2	4
-3	8
-4	16
-5	32

Vemos que:

- Su recorrido es $(0,+\infty)$;
- La gráfica corta al eje Y en el punto $(0,1)$;
- El valor de $f(x)$ decrece al crecer la x, y más lento cuanto mayor es x;
- El eje X es asíntota por la derecha.

10.3. Ecuaciones exponenciales

- Son ecuaciones que llevan la incógnita en un exponente.
- Hay algunos tipos sencillos de ecuaciones exponenciales que podemos resolver ya.

10.3.1. Ecuaciones cuyos dos miembros pueden ponerse como una potencia de la misma base.

Ejemplo 1: $2^{x-1}=16 \to 2^{x-1}=2^4 \to$ como tienen iguales las bases, estas dos potencias iguales deberán tener iguales los exponentes $\to x-1=4 \to x=5$.

Ejemplo 2:

$$\frac{125^x}{5}=1 \to \frac{(5^3)^x}{5}=1 \to \frac{5^{3x}}{5^1}=1 \to \frac{5^{3x}}{5^1}=5^0 \to 5^{3x-1}=5^0 \to 3x-1=0 \to x=\frac{1}{3}.$$

Ejemplo 3:

$$16\cdot\sqrt[5]{4^{x-1}}=\sqrt[3]{\frac{2^{3x-1}}{32}} \to 2^4\cdot 4^{\frac{x-1}{5}}=\sqrt[3]{\frac{2^{3x-1}}{2^5}} \to 2^4\cdot 2^{2\left(\frac{x-1}{5}\right)}=\sqrt[3]{2^{3x-1-5}} \to 2^{4+\frac{2x-2}{5}}=2^{\frac{3x-6}{3}} \to$$

$$4+\frac{2x-2}{5}=\frac{3x-6}{3} \rightarrow 60+6x-6=15x-30 \rightarrow 6x-15x=6-30-60 \rightarrow -9x=-84$$
$$\rightarrow x=\frac{-84}{-9} \rightarrow x=\frac{28}{3}$$

10.3.2. Ecuaciones que se resuelven por cambio de incógnitas.

Ejemplo 4: $10^{x-2}+10^{x-4}+10^{x}=10101 \rightarrow \frac{10^{x}}{100}+\frac{10^{x}}{10000}+10^{x}=10101 \rightarrow$ (haciendo el cambio

$10^{x}=z$) $\rightarrow \frac{z}{100}+\frac{z}{10000}+z=10101 \rightarrow 100z+z+10000z=101010000 \rightarrow$

$10101z=101010000 \rightarrow z=10000 \rightarrow 10^{x}=10000 \rightarrow x=4$

Ejemplo 5:

$3^{x}+9^{x-1}=4 \rightarrow 3^{x}+3^{2(x-1)}=4 \rightarrow 3^{x}+3^{2(x-1)}=4 \rightarrow 3^{x}+3^{2x-2}=4 \rightarrow 3^{x}+\frac{3^{2x}}{3^{2}}=4 \rightarrow$

$3^{x}+\frac{(3^{x})^{2}}{3^{2}}=4 \rightarrow z=3^{x} \rightarrow z+\frac{z^{2}}{9}=4 \rightarrow 9z+z^{2}=36 \rightarrow z^{2}+9z-36=0 \rightarrow$

$z=\ldots \rightarrow z=\begin{cases}3\\-12\end{cases}$

ó

$3^{x}=3$ $x=1$	$3^{x}=-12$ Sin solución porque 3^{x} siempre es positivo.

10.3.3. Sistemas de ecuaciones exponenciales.

Ejemplo 6:

$\begin{cases}2^{x}+5^{y}=9\\2^{x-1}+5^{y+1}=9\end{cases} \rightarrow \begin{cases}2^{x}+5^{y}=9\\\frac{2^{x}}{2}+5^{5}\cdot 5=9\end{cases} \rightarrow$ haciendo los cambios $\begin{matrix}2^{x}=z\\5^{y}=t\end{matrix} \rightarrow$

$\begin{cases}z+t=9\\\frac{z}{2}+5t=9\end{cases} \rightarrow \begin{cases}z+t=9\\z+10t=18\end{cases} \rightarrow$

$\begin{cases}-z-t=-9\\+z+10t=18\end{cases} \rightarrow$ restando ambas ecuaciones obtenemos $\rightarrow 9t=9 \rightarrow \rightarrow t=1$ y con la ecuación $-z-t=-9$ tenemos:

$$\rightarrow \begin{cases} z+t=9 \\ t=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2^x=8 \\ 5^y=1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x=3 \\ y=0 \end{matrix}$$

Ejemplo 7:

$$\begin{cases} \sqrt[y]{2^x}=1024 \\ \left[2^{(x-y)}\right]^{(x+y)}=2048 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2^{\frac{x}{y}}=2^{10} \\ 2^{(x-y)\cdot(x+y)}=2^{11} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y}=10 \\ x^2-y^2=11 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x=10y \\ 100y^2-y^2=11 \end{cases} \rightarrow 99y^2=11 \rightarrow y^2=\frac{11}{99}=\frac{1}{9} \rightarrow$$

$$\rightarrow y=\sqrt{\frac{1}{9}}=\begin{cases} +\dfrac{1}{3} \rightarrow x=\dfrac{10}{3} \\ -\dfrac{1}{3} \rightarrow x=-\dfrac{10}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{10}{3}; y=+\dfrac{1}{3} \\ x=-\dfrac{10}{3}; y=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

11. LOGARITMOS. FUNCIONES Y ECUACIONES LOGARÍTMICAS.

11.1. Concepto de logaritmo.

Dado un número positivo M y otro número positivo $a \neq 1$, llamamos logaritmo de M en base a al exponente al que hay que elevar la base a para que nos resuelve el número M. Se escribe $\log_a M$, que se lee "logaritmo en base a de M".

Es decir: $\log_a M = t$ si y solo si $a^t = M$

Ejemplos: $\log_2 8 = 3$ porque $2^3 = 8$, $\log_5\left(\frac{1}{5}\right) = -1$, $\log_{10}\sqrt{10} = \frac{1}{2}$

Los logaritmos más usados son:

- Los logaritmos decimales o vulgares, que son los que tienen por base el número 10 y se escribe así: log M , sin escribir explícitamente la base. Tienen una tecla en las calculadoras científicas.
- Los logaritmos neperianos o naturales, que son los que tienen por base el número irracional "e"=2,7182818… .Este número "e" es de mucha importancia en Matemáticas y estudiaras a fondo en cursos posteriores. Estos logaritmos se escriben ln M, que se lee "logaritmo neperiano de M" y también vienen en las calculadoras científicas.

NOTA: Para a=1 la definición de $\log_a M = t$ no tiene sentido ya que $1^t = 1$ para todo t.

11.2. Propiedades de los logaritmos.

(I) $\log_a 1 = 0$ para cualquier base a. Es evidente a partir de la definición.

(II) $\log_a 1 = 1$**.** También es inmediato comprobarlo a partir de la definición.

(III) Signo de $\log_a M = t$

a +	M+	$\log_a M = t$
>1	>1	+
>1	<1	-
<1	>1	-
<1	<1	+

Para comprobar los resultados del cuadro adjunto, basta saber que $a^t = M$ y tener en cuenta las gráficas de las funciones exponenciales.

(IV) Logaritmo del producto

El logaritmo del product de los números es igual a la suma de los logaritmos de cada uno de los números. Es decir:

$$\log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$$

Demostración:

$$\left.\begin{cases} \log_a(M \cdot N) = t \to a^t = M \cdot N \\ \log_a M = x \to a^x = M \\ \log_z N = y \to a^y = N \end{cases}\right\} \to a^t = a^x \cdot a^y \to a^t = a^{x+y} \to t = x + y \to$$

$$\to \log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$$

(V)Logaritmo del cociente:

El logaritmo del cociente de dos números es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor. Es decir: $\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

Demostración:

$$\left.\begin{cases} \log_a\left(\frac{M}{N}\right) = t \to a^t = \frac{M}{N} \\ \log_a M = x \to a^x = M \\ \log_a N = y \to a^y = N \end{cases}\right\} \to a^t = \frac{a^x}{a^y} \to a^t = a^{x-y} \to t = x - y \to$$

$$\to \log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$$

(VI) Logaritmo de una potencia.

El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base. Es decir:

$$\log_a\left(M^n\right)=n\log_a M$$

Demostración:

$$\left.\begin{cases}\log_a\left(M^n\right)=t\rightarrow a^t=M^n\\ \log_a M=x\rightarrow a^x=M\end{cases}\right\}\rightarrow a^t=\left(a^x\right)^n\rightarrow a^t=a^{xn}\rightarrow t=n\cdot x\rightarrow$$

$$\rightarrow \log_a\left(M^n\right)=n\log_a M$$

(VII) Logaritmo de una raíz

El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido entre el índice ó, lo que es igual, el logaritmo de una raíz es igual al inverso del índice múltiplicado por el logaritmo del radicando. Es decir:

$$\log_a\sqrt[r]{M}=\frac{1}{r}\cdot\log_a M=\frac{\log_a M}{r}$$

Demostración:

$\log_a\sqrt[r]{M}=\log_a\left(M\right)^{\frac{1}{r}}=$(Aplicando la propiedad (VI))= $\frac{1}{r}\cdot\log_a M$

(VIII) Cambio de base:

Para transformar logaritmos en base a en logaritmos de base b podemos utilizar la fórmula:

$$\log_a M=\frac{\log_a M}{\log_b a}$$

Demostración:

$$\left.\begin{cases}\log_a M=t\rightarrow a^t=M\\ \log_b M=x\rightarrow b^x=M\\ \log_b a=y\rightarrow b^y=a\end{cases}\right\}\rightarrow\left(b^y\right)^t=b^x\rightarrow b^{y\cdot t}=b^x\rightarrow yt=x\rightarrow t=\frac{x}{y}\rightarrow\log_a M=\frac{\log_b M}{\log_b a}$$

Ejemplos:

Cambio de base 5 a base 2	Cambio de base 3 a base 10
$\log_5 128=\frac{\log_2 128}{\log_2 5}$	$\log_3 53=\frac{\log 53}{\log 3}$

Esta fórmula del cambio de base es útil para calcular logaritmos que no sean de base 10 ó 2 ó e usando las calculadoras científicas.

Ejemplo:

$$\log_2 27 = \frac{\log 27}{\log 5} \approx \frac{1,43136...}{0,69897...} \approx 2,0478$$

11.3. Funciones logarítmicas:

Son aquellas en cuyas fórmulas la variable independiente viene afectada por logaritmos.

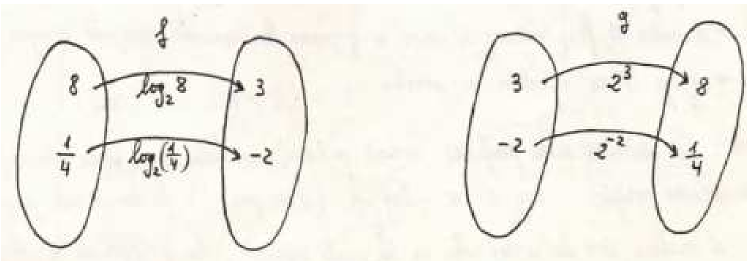
Las más útiles son las fórmulas $y = \log_a x$ ó $f(x) = \log_a x$.

La función $f(x) = \log_a x$ es inversa de la $g(x) = a^x$ ya que $f \circ g$ y $g \circ f$ resultan ser la función identidad:

$$\begin{cases} f \circ g(x) = f(g(x)) = f(a^x) = \log_a a^x = x \cdot \log_a a = x \cdot 1 = x \rightarrow f \circ g = id. \\ g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\log_a x) = a^{(\log_a x)} = x \rightarrow g \circ f = id. \end{cases}$$

Ejemplo:

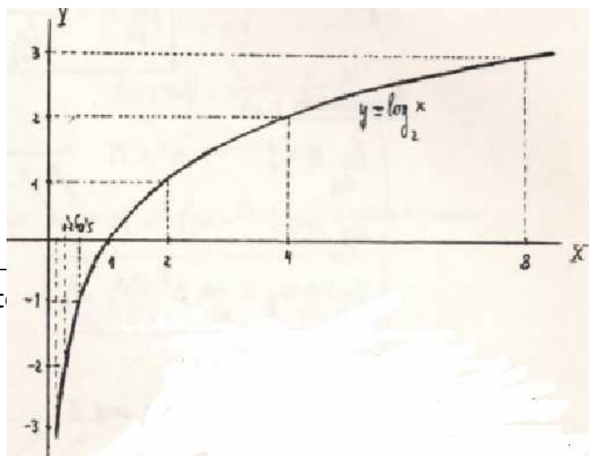
Las funciones $f(x) = \log_2 x$ y $g(x) = 2^x$ son inversas una de otra:



11.3.1 Funciones $y = \log_a x$ con $a > 1$

Su dominio es $\mathbb{R}^+$

Como ejemplo, vamos a estudiar, mediante una tabla, la función $y = \log_2 x$:



x	Y
1	$\log_2 1 = 0$

2	$\log_2 2 = 1$
4	2
8	3
$\frac{1}{2} = 0,5$	-1
$\frac{1}{4} = 0,25$	-2
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{16}$	-4

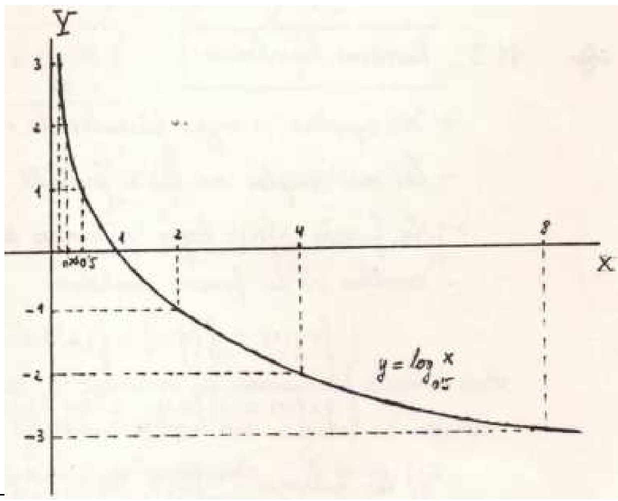
Vemos que:

- Su recorrido es todo $\mathbb{R}$
- La gráfica corta el eje X con (1,0)
- El valor de $f(x)$ crece al crecer x, pero más lentamente cuanto mayor es x
- El eje Y es asíntota por abajo.

11.3.2. Funciones $y = \log_a x$ con $0 < a < 1$

- Su dominio es $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$
- Como ejemplo, vamos a estudiar mediante una tabla, la función $y = \log_{0,5} x$:

x	Y
1	$\log_{0,5} 1 = 0$
2	$\log_{0,5} 2 = -1$
8	$\log_{0,5} 8 = -3$
0,5	1
0,25	2



0,125	3

Vemos que:

- Su recorrido es todo □
- La gráfica corta al eje X en (1,0)
- El valor de $f(x)$ decrece al crecer x y más lentamente cuanto mayor es x
- El eje Y es asíntota por arriba.

11.4 Ecuaciones logarítmicas y exponenciales resolubles con logaritmos.

- Hay algunas ecuaciones con logaritmos que podemos resolver ya utilizando diversas técnicas sencillas.
- A veces las soluciones obtenidas no son válidas porque al sustituir en la ecuación inicial producen logaritmos de números negativos o de cero que, como sabes, no se pueden calcular en □ . Por esto deberías sustituir para comprobar al final de la resolución.

11.4.1. Ecuaciones que se resuelven consiguiendo que los dos miembros de la ecuación aparezcan como un solo logaritmo de la misma base.

<u>Ejemplo:</u>

$$\log(x+3)-\log(x+2)=\log 2$$

$$\log\left(\frac{x+3}{x+2}\right)=\log 2 \rightarrow \frac{x+3}{x+2}=2 \rightarrow x+3=2x+4 \rightarrow -x=1 \rightarrow x=-1$$

<u>Ejemplo:</u>

$$\log(55-x)=\log 300-\log(x+1)$$

$$\log(55-x)=\log\left(\frac{300}{x+1}\right) \rightarrow 55-x=\frac{300}{x+1} \rightarrow (55-x)\cdot(x+1)=300 \rightarrow$$

$$\rightarrow -x^2+55x-x+55=300 \rightarrow 0=x^2-54x+245 \rightarrow x=\frac{+54\pm\sqrt{2916-980}}{2}=\ldots=\begin{cases}49\\5\end{cases}$$

En este caso las dos soluciones son válidas.

11.4.2. Ecuaciones que se resuelven transformándolas hasta la forma: $\log_a$ **(expresión)=nº y aplicando la definición de logaritmo.**

Ejemplo:

$$5\cdot\log_2 x = 5+\log_2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\to \log_2(x^5)-\log_2\left(\frac{x}{2}\right)=5 \to \log_2\left(\frac{x^5}{\frac{x}{2}}\right)=5 \to \log_2\left(2x^4\right)=5 \to 2x^4=2^5 \to 2x^4=32 \to$$

$$x^4=16 \to x=\sqrt[4]{16}=\begin{cases}2\\ \cancel{-2}(inválida)\end{cases}$$

11.4.3. Sistema de ecuaciones.

Ejemplo:

$$\left.\begin{cases}2\cdot\log x-2\log y=1\\ \log x+\log y=3\end{cases}\right\}\to\left.\begin{cases}\log x^2-\log y^2=1\\ \log(x\cdot y)=3\end{cases}\right\}\to\left.\begin{cases}\log\left(\frac{x^2}{y^2}\right)\\ \log(x\cdot y)=3\end{cases}\right\}\to$$

$$\to\left.\begin{cases}\frac{x^2}{y^2}=10\\ x\cdot y=1000\to x=\frac{1000}{y}\end{cases}\right\}\to\left.\begin{cases}\frac{\left(\frac{1000}{y}\right)^2}{y^2}=10\end{cases}\right\}\to\frac{1000000}{y^2}=10y^2\to10^6=10y^4\to$$

$$\to y^4=10^5\to y=\sqrt[4]{10^5}$$

Calculando el valor de la x:

$$x=\frac{1000}{y}\to x=\frac{1000}{\sqrt[4]{10^5}}=\frac{10^3}{10^{\frac{5}{4}}}=10^{(3-\frac{5}{4})}=10^{\frac{7}{4}}=\sqrt[4]{10^7}$$

Solución: $x=\sqrt[4]{10^7}$; $y=\sqrt[4]{10^5}$

11.4.4. Ecuaciones exponenciales resolubles con logaritmos.

Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
&2^x = 7\\
&\log(2^x) = \log 7\\
&x \cdot \log 2 = \log 7\\
&x = \frac{\log 7}{\log 2} \approx 2,80735
\end{aligned}
$$

Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
&2^{x+5} = 5 \cdot 3^{x-1}\\
&\log(2^{x+5}) = \log(5 \cdot 3^{x-1})\\
&(x+5)\log 2 = \log 5 + (x-1)\log 3\\
&x\log 2 + 5\log 2 = \log 5 + x\log 3 - \log 3\\
&x\log 2 - x\log 3 = -5\log 2 - \log 3 + \log 5\\
&x(\log 2 - \log 3) = \log 5 - \log 3 - 5\log 2\\
&x = \frac{\log 5 - \log 3 - 5\log 2}{\log 2 - \log 3} = \frac{-1,28330...}{-0,17609...} \approx 7,2877
\end{aligned}
$$

Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
&3^x + 3^{x+2} = 7\\
&3^x + 3^x \cdot 3^2 = 7\\
&3^x + 3^x \cdot 9 = 7\\
&3^x \cdot (1+9) = 7\\
&3^x \cdot 10 = 7\\
&3^x = 0,7\\
&\log 3^x = \log 0,7\\
&x\log 3 = \log 0,7\\
&x = \frac{\log 0,7}{\log 3} \approx 0,3247
\end{aligned}
$$

FUCIONES ESPECIALES:

Función valor absoluto:

(Recordatorio: En matemática, el valor absoluto o módulo de un número real es su valor numérico sin tener en cuenta su *signo*, sea este positivo (+) o negativo (-). Así, por ejemplo, 3 es el valor absoluto de 3 y de -3.)

Las funciones en valor absoluto se transforman en funciones a trozos, siguiendo los siguientes pasos:

1. **Se iguala a cero** la función, sin el valor absoluto, y **se calculan sus raíces**.

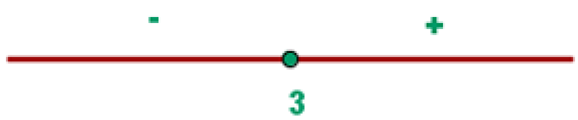
2. Se forman **intervalos con las raíces y se evalúa el signo** de cada intervalo.

3. Definimos la función a trozos, teniendo en cuenta que en l**os intervalos donde la x es negativa se cambia el signo de la función**.

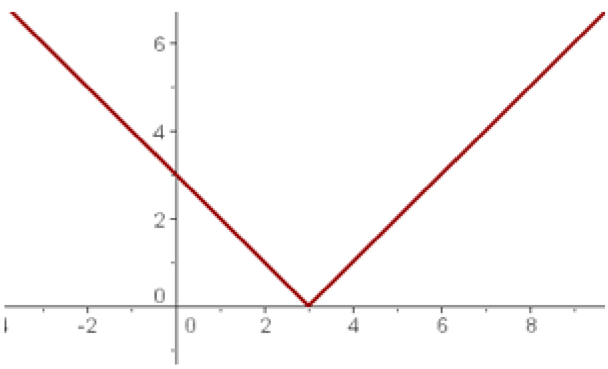
4 Representamos la función resultante.

$$f(x) = |x-3|$$

$x - 3 = 0$ $\qquad\qquad$ $x = 3$



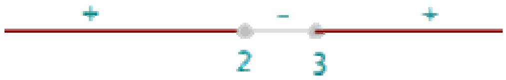
$$f(x) = \begin{cases} -(x-3) & \text{si} \quad x<3 \\ x-3 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$



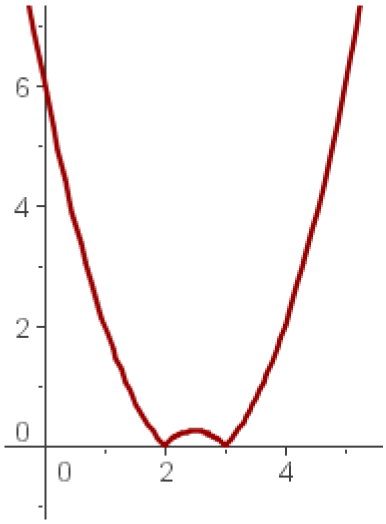
D= $\mathbb{R}$

$$f(x) = |x^2 - 5x + 6|$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \qquad x = 2 \qquad x = 3$$



$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6 & \text{si} \quad x < 2 \\ -(x^2 - 5x + 6) & \text{si} \quad 2 \le x < 3 \\ x^2 - 5x + 6 & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$$



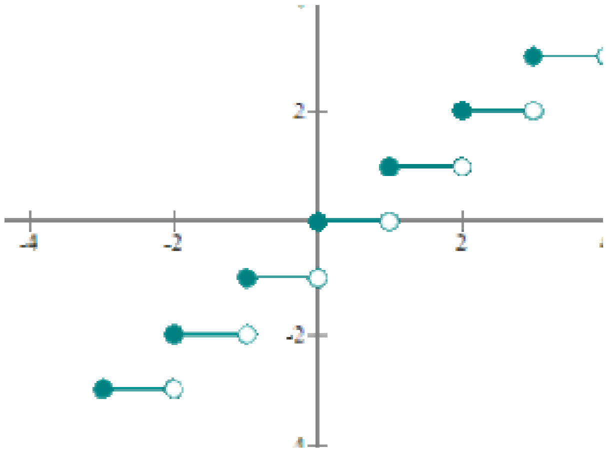
D= $\mathbb{R}$

Función parte entera de x

La **función parte entera de x** hace corresponder a cada número real el número entero inmediatamente inferior.

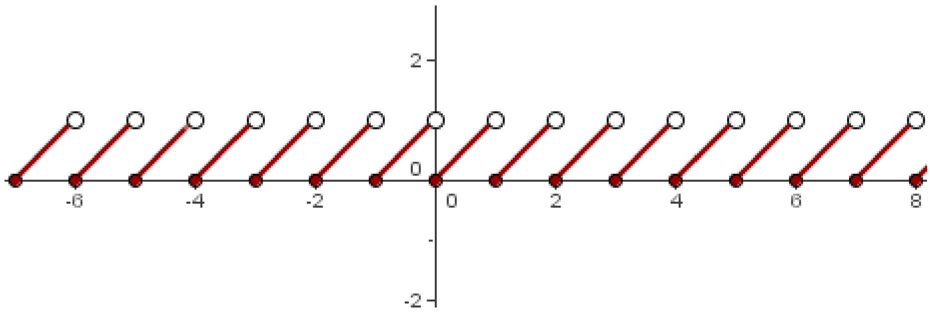
f(x) = E (x)

x	0	0.5	0.9	1	1.5	1.9	2
f(x) = E(x)	0	0	0	1	1	1	1



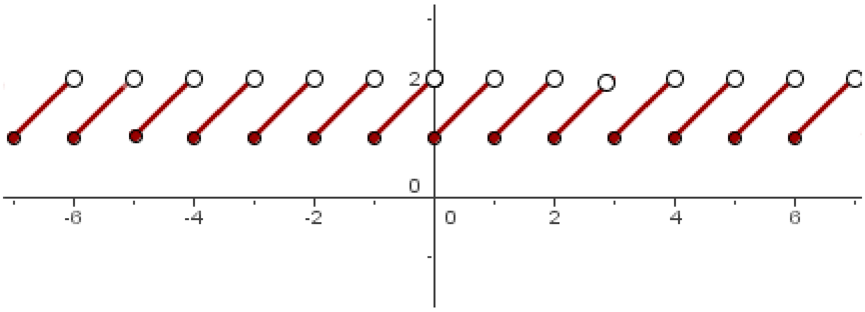
f(x) = x - E (x)

x	0	0.5	0.9	1	1.5	1.9	2
f(x) = x - E(x)	0	0.5	0.9	0	0.5	0.9	0



f(x) = x + 1 – E(x)

x	0	0.5	0.9	1	1.5	1.9	2
f(x) = x + 1 - E(x)	1	1.5	1.9	1	1.5	1.9	1



f(x) = 2x – E(x)

x	0	0.5	0.9	1	1.5	1.9	2
E(x)	0	1.5	1.9	1	2	2.7	3