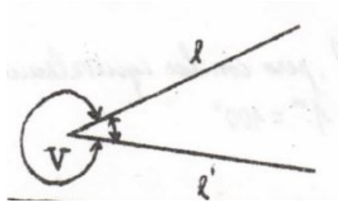
TRIGONOMETRÍA

1. ÁNGULOS EN EL PLANO.

1.1. Definición.

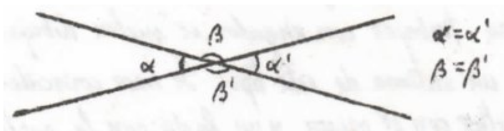
Llamaremos ángulo a cada uno de las dos regiones del plano que se forman con dos semirrectas coincidentes.

Al punto V donde concurren las dos semirrectas se le llama vértice. Cada una de las dos semirrectas recibe el nombre de lado del ángulo.



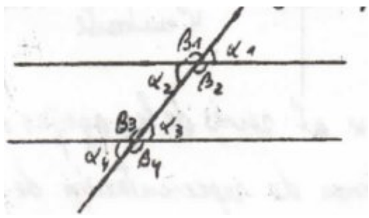
1.2. Igualdad de ángulos. Algunos tipos de ángulos

-Dos ángulos son iguales cuando se pueden superponer con una coincidencia exacta.
-Dados dos ángulos α y β, decimos que α es mayor que β, cuando podemos tapar completamente a β superponiéndole el α.
-Decimos que dos rectas son perpendiculares entre sí, cuando al cortarse forman 4 ángulos iguales.
-Llamamos ángulo recto a cada uno de los 4 ángulos iguales que se forman al cortarse dos rectas perpendiculares.
-Un ángulo es agudo si es menor que uno recto y obtuso si es mayor.
-Un ángulo es llano si sus lados son semirrectas distintas de la misma recta.
-Dos ángulos están adyacentes si están uno a continuación del otro coincidiendo el vértice y uno de los lados. Dos ángulos son complementarios si puntos adyacentes forman un ángulo recto, y son suplementarios si forman un llano.
-Al cortarse dos rectas oblicuamente (no en perpendicular), se forman 4 ángulos que son iguales dos a dos. En este caso a los ángulos iguales se les llama opuestos por el vértice.



-Al cortar una recta oblicuamente a otros dos paralelas se forman 8 ángulos (4 agudos y 4 obtusos), de los cuales son iguales entre sí los agudos por un lado y los obtusos por otro.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$$
$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$$



1.3. Medida de ángulos.

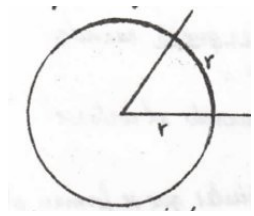
Para medir ángulos utilizaremos las siguientes unidades:

<u>Sistema sexagesimal</u>

Decimos que un ángulo mide un grado sexagesimal (1º) si cabe exactamente 90 veces en un ángulo recto.
1 recto= 90º.

Decimos que un ángulo mide un minuto sexagesimal (1´) si cabe exactamente en 60 veces en un ángulo de 1º.
1º=60´.
Decimos un ángulo mide un segundo sexagesimal (1´´) si cabe exactamente 60 veces en un ángulo de 1´.
1´=60´´

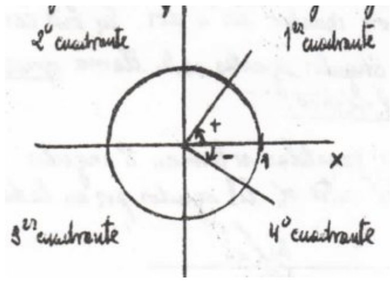
Sistema centesimal.
Unidades análogas a las del sistema sexagesimal, pero con las equivalencias siguientes:
1 recto= 100^g
$1^g = 100^m$
$1^m = 100^s$
Radián
Decimos que un ángulo mide un radián (1 rad.) , si, al cortarlo con el vértice en el centro de la circunferencia, sus lados cortan sobre la circunferencia un arco de longitud igual al radio de la circunferencia.



Como la longitud de la circunferencia es $2\pi r$, sobre ella cabrá el radio 2π veces. Por tanto el ángulo el ángulo correspondiente a la circunferencia completa medirá 2π radianes $(\approx 6,28 rad.)$.

Cambios de unidades.
Basta tener en cuenta las equivalencias $360^o = 2\pi rad = 400^g$, ó $180^o = \pi rad = 200^g$, ó $90^o = \frac{\pi}{2} rad = 100^g$, u otra similar.
Sistema de referencia goniométrico.

Consiste en un sistema de coordenadas cartesianas al que se le agrega una circunferencia de radio 1 y cuyo centro está en el origen de coordenadas.



Para trabajar con ángulos se suelen dibujar sobre un sistema de este tipo. Se hace coincidir el vértice con el origen y un lado con la parte positiva del eje X. Para dibujar el ángulo bastará trazar el otro lado.
Hay dos sentidos posibles, positivo y negativo, según se gire al revés de las agujas del reloj (+) o como las agujas del reloj (-).
Este sistema de representación de ángulos permite imaginarlos como giros y hablar, por tanto, de ángulos mayores de una vuelta (360º o 2π radianes). Con ello cualquier número real + ó – puede ser la medida de un ángulo.
Los cuadrantes quedan numerados como se indica en la figura.

2. REPASO DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

2.1 Polígonos

-Llamamos polígonos a toda línea quebrada cerrada. Cada uno de los segmentos que forman la línea quebrada se llama lado.

-Según el número de lados se llaman: triángulos, cuadriláteros, pentágonos,…

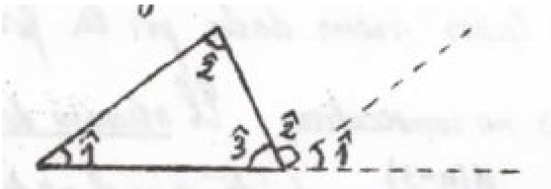
- Un polígono es regular si tiene todos sus lados y ángulos iguales.

2.1.1. Triángulos.

-Según los lados pueden ser: equiláteros (tres lados iguales), isósceles (dos lados iguales) o escalenos (ninguno igual).

-Según los ángulos son acutángulos (tres lados agudos), rectángulos (un ángulo recto), obstusángulos (1 ángulo obtuso).

- La suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera es 180º.



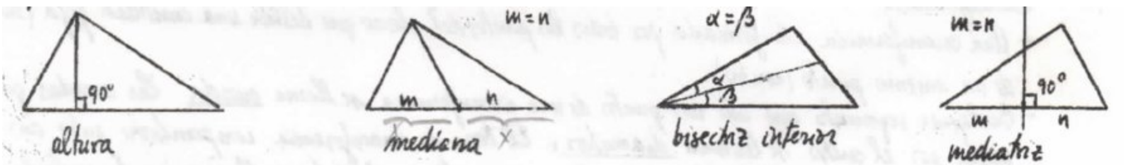
$\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}=180^{\circ}$

-Llamamos alturas de un triángulo a los segmentos que van desde cada vértice en perpendicular hasta el lado opuesto. Las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto llamado ortocentro.

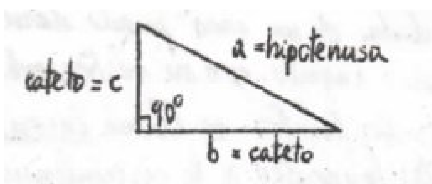
-Llamamos medianas de un triángulo a los segmentos que van desde cada vértice al punto medio del lado opuesto. Las tres medianas se cortan en un punto llamado baricentro que dista, en cada mediana, el doble del vértice que del lado.

-Llamamos bisectrices interiores de un triángulo a los segmentos que, partiendo de cada vértice, dividen cada ángulo interior por la mitad y van hasta el lado opuesto. Las tres se cortan en un punto llamado incentro porque es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.

-Llamamos mediatrices de un triángulo a las rectas perpendiculares en los puntos medios de los lados. Se cortan en un punto llamado circuncentro, porque es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.



-En un triángulo rectángulo los lados que forman el ángulo recto se llaman catetos y el lado opuesto al ángulo recto se le llama hipotenusa. En los triángulos rectángulos se cumple el teorema de Pitágoras: “la hipotenusa la cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos”



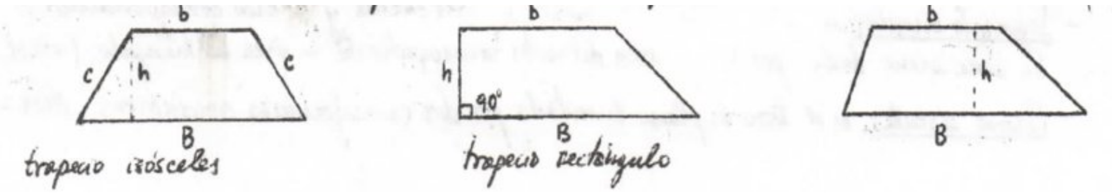
$a^2 = b^2 + c^2$

-Recuerda que el perímetro es la suma de las longitudes de los lados, y que el área de un triángulo se calcula así: $area = \dfrac{base \cdot altura}{2}$ y que cualquier lado puede ser base.

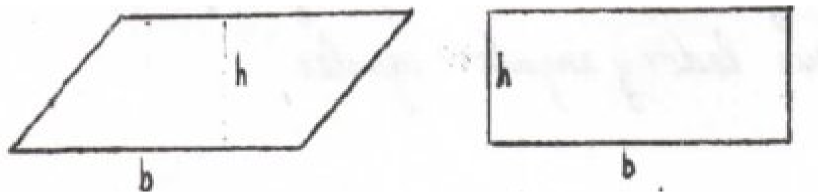
2.1.2 Cuadriláteros.

- Los cuadriláteros con dos lados paralelos se llaman trapecios.

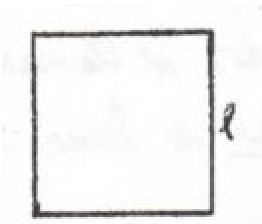
$$área = \left(\frac{B+b}{2}\right) \cdot h$$

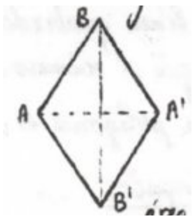


-Los cuadriláteros con los dados paralelos dos a dos se llaman paralelogramos. Dentro de ellos, si tienen los cuatro ángulos iguales se llaman rectángulos (porque los cuatro ángulos son rectos), si tienen los cuatro lados iguales se llaman rombos y si tienen iguales los lados y los ángulos tenemos a los cuadriláteros.



$$área = b \cdot h$$





$$área = l \cdot l$$

$$\overline{AA'} = d$$
$$BB' = D$$
$$área = \frac{D \cdot d}{2}$$

-En todos los cuadriláteros la suma de los ángulos interiores da 360º ¿Por qué?

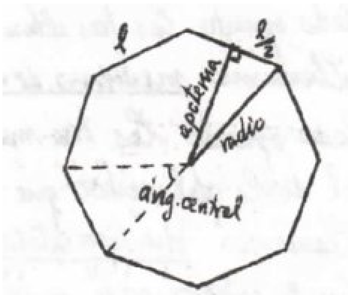
2.1.3 Polígonos en general.

- La suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados viene dada por la fórmula: $180^{o}(n-2)$

-Llamamos diagonales a los segmentos que unen vértices no consecutivos. El número de diagonales de un polígono viene dado por la fórmula: $N_D = \dfrac{n(n-3)}{2}$, donde n es el número de lados.

-En todo polígono regular:

Llamamos centro del polígono al centro de la circunferencia circunscrita al polígono. Los segmentos que unen al centro con los vértices se llaman radios del polígono. Los segmentos que unen el centro en perpendicular con cada lado se llaman apotemas. En los polígonos regulares los apotemas pasan por el punto medio de los lados.



-El área de un polígono regular viene dado por la fórmula: $área = \frac{perímetro \cdot apotema}{2}$

2.2. Circunferencias y círculos.

2.2.1. Circunferencia.

-Una circunferencia está formada por todos los puntos del plano que distan una cantidad fija (radio) de un mismo punto (centro).

.-Cualquier segmento que une dos puntos de una circunferencia se llama cuerda. Las cuerdas que pasan por el centro se llaman diámetros. El trozo de circunferencias comprendido entre dos puntos se llama arco. Cualquier ángulo con su vértice en el centro se llama ángulo central.

-La medida de un arco puede darse por la del ángulo central que le corresponde.

-Cualquier ángulo con su vértice sobre la circunferencia y cuyos lados cortan a la circunferencia en otros puntos se llama inscrito, y su medida es la mitad de la del arco que corta.

- Las rectas tangentes a la circunferencia son perpendiculares al radio correspondiente al punto de tangencia.

-La longitud de una circunferencia viene dada por la fórmula $L = 2\pi \cdot radio = 2\pi r$

-La longitud de un arco de circunferencia viene dada por la fórmula $L = \left(\frac{2\pi r}{360}\right) \cdot n^{o} \deg rados = \frac{\pi \cdot r \cdot n^{o}}{180^{o}}$

2.2.2. Circulo.

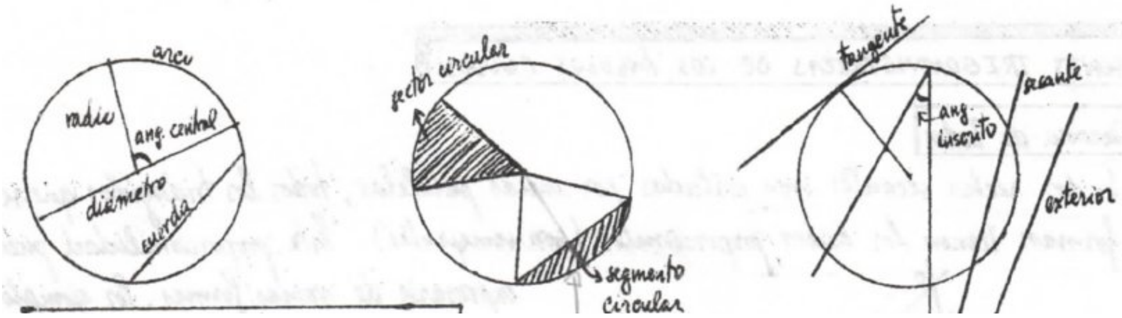
-Circulo es el trozo de plano limitado por una circunferencia. $Área = \pi \cdot r^2$

-Sector circular es el trozo de círculo limitado por dos radios. $Área = \left(\frac{\pi \cdot r^2}{360}\right) \cdot n^{o} \deg rados = \frac{\pi r^2 n^{o}}{360}$

-Segmento circulares el trozo de circulo limitado por una cuerda y su arco correspondiente.

Su área viene dada por: área del sector correspondiente – área del triángulo (véase dibujo).

-Corona circular es el trozo de plano limitado por dos circunferencias concéntricas. $Área = \pi R^2 - \pi r^2$



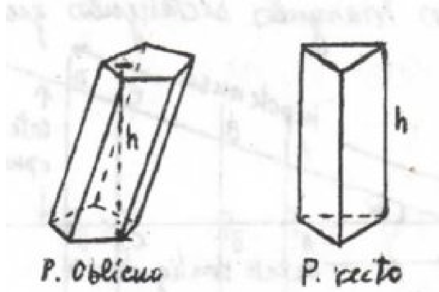
2.3. Algunas figuras tridimensionales.

2.3.1 Poliedros.

- Sólidos limitados por todas partes por caras planas. Se dicen regulares cuando tienen todas sus caras iguales y todos los ángulos formados por sus caras iguales. Sólo existen 5 poliedros regulares que son:

2.3.2 Prismas.

-Son polígonos limitados por dos polígonos iguales y paralelos, llamados bases, y por paralelogramos que unen los lados de las bases que se llaman caras laterales. Se llaman regulares si lo son las bases. Son rectos u oblicuos según que las caras laterales sean perpendiculares o no a las bases.



-Si las bases son paralelogramos se llaman paralelepípedos

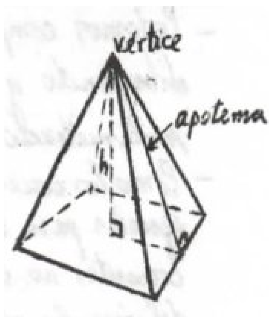
- Área total= Área lateral+2 Área base;

Área lateral= perímetro base x altura

Volumen= Área base x altura.

2.3.3 Pirámides.

-Son poliedros limitados por un polígono cualquiera, llamado base y por triángulos llamados caras laterales, que tienen por bases cada uno de los lados del polígono y que tienen un vértice común llamado vértice de la pirámide. Son regulares si lo es la base y si las caras laterales son triángulos isósceles iguales. En una pirámide regular, la apotema es la altura de una cara



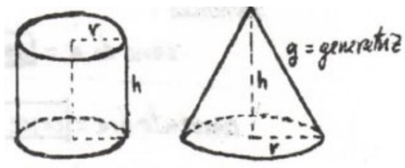
-En una pirámide cualquiera: $volumen = \frac{1}{3} \cdot base \cdot altura$

-En las pirámides regulares:

$$\acute{A}rea\_lateral = \frac{1}{2} \cdot perímetro\_base \cdot apotema$$

$$\acute{A}rea\_total = \acute{A}rea\_lateral + \acute{A}rea\_base$$

2.3.4 Cilindros y conos.



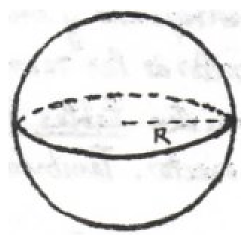
-Cilindro es el cuerpo geométrico engendrado por un rectángulo al girar sobre uno de sus lados.

-Área lateral del cilindro $= 2\pi r \cdot h$; $Volumen = \pi r^2 \cdot h$

-Cono es el cuerpo geométrico engendrado por un triángulo rectángulo al girar sobre uno de sus catetos.

-Área lateral del cono= πrg ; Área total= $\pi rg + \pi r^2$; Volumen= $\frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$

2.3.5 Esfera.



-Una superficie esférica está formada por todos los puntos del espacio que distan una cantidad fija (radio) de un punto fijo (centro). La porción de espacio limitada por una superficie esférica se llama esfera.

-Área= $4\pi R^2$; Volumen= $\frac{4}{3}\pi R^3$

3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ÁNGULOS AGUDOS.

3.1. Teorema de Tales.

-Si dos rectas secantes son cortadas por varias paralelas, todos los triángulos que se forman tienen los lados proporcionales (son semejantes). Esta proporcionalidad puede expresarse de varias formas. Por ejemplo:

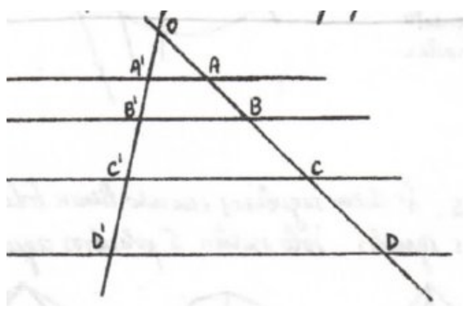
$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{AA'}{BB'}$$

ó

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = \frac{OD}{OD'} = \ldots$$

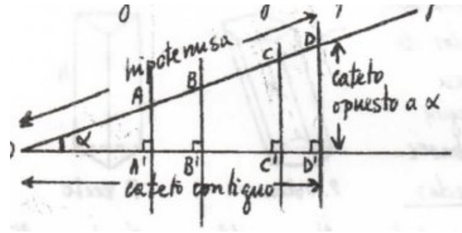
ó

$$\frac{OA'}{A'A} = \frac{OB'}{B'B} = \frac{OC'}{C'C} = \frac{OD'}{D'D} = \ldots$$



3.2 Razones trigonométricas de los ángulos agudos.

-Dado un ángulo agudo α, si trazamos rectas perpendiculares a uno de sus lados, obtenemos un haz de paralelas cortadas por dos secantes. Por el teorema de Tales, sabemos que los triángulos rectángulos que se forman tienen los lados proporcionales. De todas las formas en que pueden expresarse esa proporcionalidad, vamos a fijar nuestra atención en las 6 siguientes:



$$\frac{AA'}{OA}=\frac{BB'}{OB}=\frac{CC'}{OC}=...=\frac{cateto\_opuesto}{hipotenusa}$$
$$\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=...=\frac{cateto\_contiguo}{hipotenusa}$$
$$\frac{AA'}{OA'}=\frac{BB'}{OB'}=\frac{CC'}{OC'}=...=\frac{cateto\_opuesto}{cateto\_contiguo}$$
$$\frac{OA}{AA'}=\frac{OB}{BB'}=\frac{OC}{CC'}=...=\frac{hipotenusa}{cateto\_opuesto}$$
$$\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}=\frac{OC}{OC'}=...=\frac{hipotenusa}{cateto\_contiguo}$$
$$\frac{OA'}{AA'}=\frac{OB'}{BB'}=\frac{OC'}{CC'}=...=\frac{cateto\_contiguo}{cateto\_opuesto}$$

-Podemos comprobar estas igualdades dibujando y midiendo sobre un papel milimetrado.

-Como los cocientes entre los lados son iguales para todos los triángulos, estos cocientes no dependen del triángulo sino del ángulo α . Por ello, a estos seis cocientes o razones se les llaman razones trigonométricas del ángulo agudo α , y reciben los siguientes nombres:

Seno de α = $sen\alpha=\frac{cat.opuesto}{hipotenusa}$

Coseno de α = $\cos\alpha=\frac{cat.contiguo}{hipotenusa}$

Tangente de α = $tg\alpha=\frac{cat.opuesto}{cat.contiguo}$

Cosecante de α = $\cos ec\alpha=\frac{hipotensusa}{cat.opuesto}$

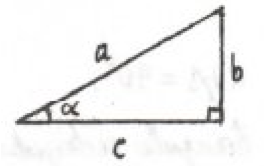
Secante de α = $\sec\alpha=\frac{hipotenusa}{cat.contiguo}$

Cotangente de α = $\cot g\alpha=\frac{cat.contiguo}{cat.opuesto}$

-Al ser la hipotenusa mayor que cualquier cateto hay ciertas razones que serán menores que 1, otras que serán mayores que 1 y otras que podrán tomar cualquier valor. ¿Cuáles?.

-Dibujando y midiendo sobre papel milimetrado podemos calcular, de forma aproximada, el valor de las razones trigonométricas de cualquier ángulo agudo. Para evitarnos este trabajo existen tablas trigonométricas donde ya vienen estos valores, calculados por métodos más exactos. También vienen en las calculadoras científicas.

3.3 Relaciones entre las razones de un ángulo. Fórmulas fundamentales.



$$\begin{cases} sen^2\alpha+\cos^2\alpha=\dfrac{b^2}{a^2}+\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{b^2+c^2}{a^2}=\begin{pmatrix} teor.de \\ Pitágoras \end{pmatrix}=\dfrac{a^2}{a^2}=1 \\ Es\_decir: sen^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\frac{b}{\cancel{a}}}{\frac{c}{\cancel{a}}}=\dfrac{b}{c}=tg\alpha, \text{ es decir } tg\alpha=\dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} tg^2\alpha+1=\dfrac{b^2}{c^2}+1=\dfrac{b^2+c^2}{c^2}=\dfrac{a^2}{c^2}=\sec^2\alpha \text{ , es decir } \sec^2\alpha=tg^2\alpha+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos ec\alpha=\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{\frac{b}{a}}=\dfrac{1}{sen\alpha} \text{ , es decir } \cos ec\alpha=\dfrac{1}{sen\alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sec\alpha=\dfrac{a}{c}=\dfrac{1}{\frac{c}{a}}=\dfrac{1}{\cos\alpha} \text{ , es decir } \sec\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cot g\alpha=\dfrac{c}{b}=\dfrac{1}{\frac{b}{c}}=\dfrac{1}{tg\alpha} \text{ , es decir, } \cot g\alpha=\dfrac{1}{tg\alpha} \end{cases}$$

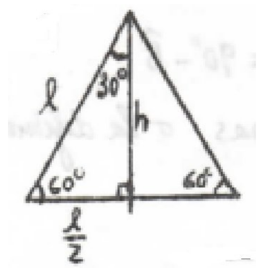
-A partir de estas fórmulas se pueden obtener muchas más, pero estas seis son consideradas fundamentales. Haciendo uso de ellas podemos calcular, a partir de una cualquiera de las razones trigonométricas de un ángulo, las cinco restantes.

3.4 Razones trigonométricas de los ángulos de 30º, 45º y 60º.

-Con estos ángulos podemos calcular las razones trigonométricas de forma exacta y con razonamientos geométricos sencillos.

$\boxed{\text{30º y 60º}}$

-Partimos de un triángulo equilátero al que le dibujamos una altura. Con ello obtenemos dos triángulos rectángulos iguales. Aplicamos primero el teorema de Pitágoras para calcular h:



$$l^2=h^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2 \to h^2=l^2-\frac{l^2}{4}=\frac{4l^2-l^2}{4}=\frac{3l^2}{4} \to h=\sqrt{\frac{3l^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}l$$

-Entonces:

$$sen60^{o}=\frac{h}{l}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cancel{l}}{\cancel{l}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^{o}=\frac{\frac{l}{2}}{l}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\cancel{l}}{\cancel{l}}=\frac{1}{2}$$

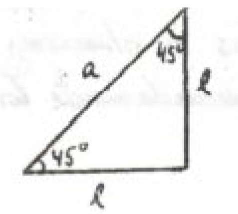
$$tg60^{o}=\frac{h}{\frac{l}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cdot\cancel{l}}{\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{l}}=\sqrt{3}$$

$$sen30^{o}=\frac{\frac{l}{2}}{l}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\cancel{l}}{\cancel{l}}=\frac{1}{2}$$

$$\cos 30^{o}=\frac{h}{l}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cancel{l}}{\cancel{l}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg30^{o}=\frac{\frac{l}{2}}{h}=\frac{\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{l}}{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cdot\cancel{l}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

45º



-Partimos de un triángulo recto isósceles.

Por el teorema de Pitágoras: $a^2=l^2+l^2=2l^2 \ \rightarrow\ a=\sqrt{2l^2}=\sqrt{2}l$

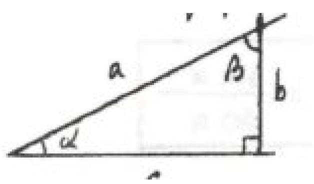
-Entonces:

$$sen45^{o}=\frac{l}{a}=\frac{l}{\sqrt{2}l}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 45^{o}=\frac{l}{a}=\ldots=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg45^{o}=\frac{l}{l}=1$$

3.5 Razones trigonométricas de los ángulos complementarios.

Dado un ángulo agudo α y su complementario β, sabemos que $\alpha+\beta=90^{o}$.



Trazando una perpendicular a uno de los lados de α, se obtiene un triángulo rectángulo cuyo otro ángulo debe medir 90º-α porque entre los tres ángulos de un triángulo deben medir 180º. Por tanto ese otro ángulo debe medir igual que β. Aplicando las definiciones razones trigonométricas se obtiene:

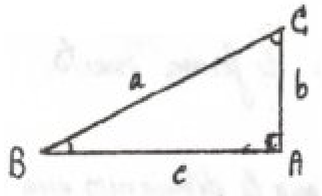
$$\left.\begin{array}{l} sen\alpha=\frac{b}{a}=\cos\beta \\ \cos\alpha=\frac{c}{a}=sen\beta \\ tg\alpha=\frac{b}{c}=\cot g\beta \end{array}\right\} \text{Es decir, si } \alpha \text{ y } \beta \text{ son complementarios se tiene} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} sen\alpha=\cos\beta \\ \cos\alpha=sen\beta \\ tg\alpha=\cot g\beta \end{array}\right.$$

4. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.

-Resolver un triángulo es conocer las medidas de sus tres lados y sus tres ángulos. En un triángulo rectángulo ya tenemos conocido el ángulo-recto y si conocemos, además, dos lados ó un lado y un ángulo agudo, podemos calcular los restantes elementos. Para ello podemos usar las definiciones de las razones trigonométricas, el Teorema de Pitágoras y el hecho de que la suma de los ángulos vale 180º.

a) Conocidos dos lados:

Ejemplo: a y b conocidos.



Como $senB = \frac{b}{a}$, podemos conocer $\hat{B}$ utilizando unas tablas ó la calculadora.

Conociendo $\hat{B}$ ya podemos hallar $\hat{C} = 90º - \hat{B}$.

Para hallar el lado c podemos ahora utilizar el teorema de Pitágoras ó la definición del coseno de $\hat{B}$. (Hay otros caminos).

b) Conocido un lado y un ángulo agudo.

Ejemplo: c y $\hat{B}$ conocidos

El ángulo $\hat{C}$ queda calculado con $\hat{C} = 90º - \hat{B}$

Aplicando el coseno de B $\rightarrow \cos B = \frac{c}{a}$, podemos calcular el lado a.

Aplicando la tangente de B $\rightarrow tgB = \frac{b}{c}$, podemos calcular el lado de b.

-Multitud de problemas geométricos, de cálculo de distancias y de alturas en situaciones reales pueden ser resueltos siguiendo estos procedimientos eligiendo adecuadamente los triángulos.

5. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS CUALESQUIERA.

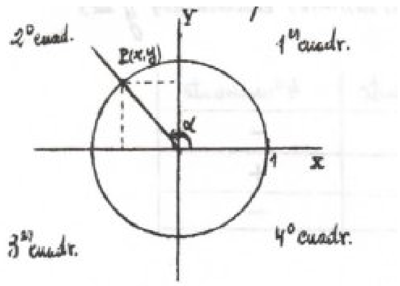
5.1. Definición.

Dado un ángulo cualquiera α, lo colocamos en un sistema goniométrico de referencia y obtenemos el punto de corte P con la circunferencia. Este punto tendrá unas coordenadas respecto a los ejes X e Y. Se definen entonces:

$$sen\alpha = \frac{ordenada\_de\_P}{radio\_de\_la\_circ.} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos\alpha = \frac{abcisa\_de\_P}{radio\_de\_la\_circ.} = \frac{x}{1} = x$$

$$tg\alpha = \frac{ordenada\_de\_P}{abcisa\_de\_P} = \frac{y}{x}$$



-También definimos las razones trigonométricas inversas:

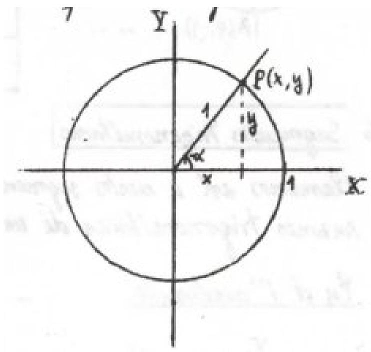
$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{radio}{ordenada\_de\_P} = \frac{1}{y}$$

$$\sec\alpha = \frac{radio}{abcisa\_de\_P} = \frac{1}{x}$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{abcisa\_de\_P}{ordenada\_de\_P} = \frac{x}{y}$$

5.2. Coincidencia para ángulos agudos de las dos definiciones de razones trigonométricas.

-Para ángulos agudos tenemos ahora dos definiciones distintas, una que se basa en los cocientes entre catetos e hipotenusa, y otra basada en las coordenadas del punto de corte P en un sistema de referencia goniométrico. Veamos que ambas definiciones coinciden para los ángulos agudos:



	Definición antigua	Definición nueva
$sen\alpha$ =	$\frac{cat.opuesto}{hipotenusa}$	$\frac{ordenada\_de\_P}{radio\_de\_la\_circ.}$
$\cos\alpha$ =	$\frac{cat.contiguo}{hipotenusa}$	$\frac{abcisa\_de\_P}{radio\_de\_la\_circ.}$
$tg\alpha$ =	$\frac{cat.opuesto}{cat.contiguo}$	$\frac{ordenada\_de\_P}{abcisa\_de\_P}$

-Basta que nos fijemos en la figura para que veamos la coincidencia de las definiciones.

5.3 Fórmulas fundamentales. Identidades trigonométricas.

-Las 6 fórmulas fundamentales, en páginas anteriores para ángulos agudos, se siguen cumpliendo con las nuevas definiciones para ángulos cualesquiera. La deducción de las seis fórmulas se puede hacer siguiendo el mismo procedimiento que en paginas anteriores, teniendo en cuenta que, en cualquier cuadrante, las coordenadas del punto P(x,y) cumplen $x^2 + y^2 = 1$.

-A partir de estas fórmulas se pueden obtener muchas más llamadas identidades trigonométricas. Haciendo uso de las fórmulas fundamentales podemos calcular, teniendo en cuenta el cuadrante donde se encuentra P para poner el signo, valores de razones trigonométricas a partir de otras.

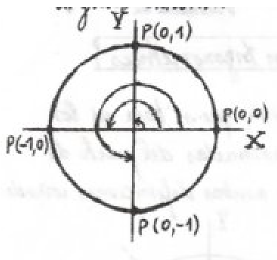
5.4 Signos de las razones trigonométricas en los distintos cuadrantes.

-Decimos que un ángulo está en un determinado cuadrante, cuando el punto P de corte con la circunferencia está en ese cuadrante.

-Teniendo en cuenta los signos de las coordenadas en los distintos cuadrantes y las definiciones de las razones trigonométricas tenemos:

	Primer cuadrante	Segundo cuadrante	Tercer cuadrante	Cuarto cuadrante
$sen\alpha$	+	+	-	-
$\cos\alpha$	+	-	-	+
$tg\alpha$	+	-	+	-

5.5 Ángulos notables.



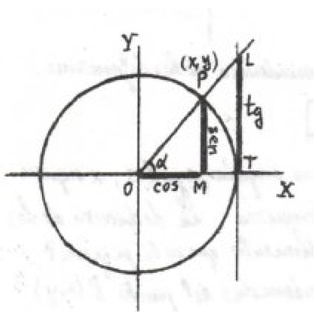
-Debemos memorizar, ó saber deducir rápidamente, las razones trigonométricas de los ángulos extremos de cuadrante. Sus valores pueden deducirse de las definiciones y observando la figura. También debemos memorizar las razones trigonométricas de 30º, 45º y 60º ya calculadas.

	0º	30º	45º	60º	90º	180º	270º	360º
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	No existe	0	No existe	0

5.6 Segmentos trigonométricos.

Llamamos así a ciertos segmentos cuyas medidas coinciden con los valores de las razones trigonométricas de un ángulo.

<u>En el primer cuadrante:</u>



-Si en un sistema de referencia goniométricos tomamos un ángulo α del primer cuadrante y aplicamos la definición del seno, tendremos:

$$sen\alpha = \frac{ordenada\_de\_P}{radio} = \frac{y}{1} = y = \overline{PM}$$

Vemos así que el valor del seno es lo que mide el segmento que va desde el punto de corte P con la circunferencia, hasta el eje OX en perpendicular.

-Con el coseno tendremos análogamente:

$$\cos\alpha = \frac{abcisa\_de\_P}{radio} = \frac{x}{1} = x = \overline{OM}$$

Por tanto, el valor del coseno es lo que mide el segmento que va desde el centro de coordenadas, O, al pie de la perpendicular correspondiente al seno.

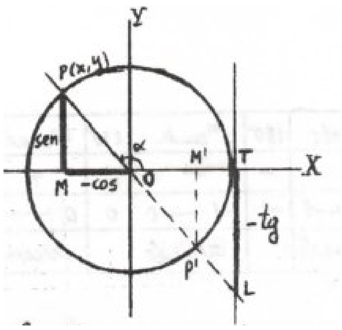
Para la tangente trazamos la perpendicular al eje X por el punto T(1,0), y se obtiene el punto L al cortar a la prolongación de $\overline{OP}$. Se forman así dos triángulos con lados paralelos que, por el teorema de Tales, tendrán sus lados proporcionales. Así:

$$tg\alpha = \frac{ordenada\_de\_P}{abcisa\_de\_P} = \frac{y}{x} = \frac{\overline{PM}}{\overline{OM}} =$$

= (por el teorema de Tales)= $= \frac{\overline{LT}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{LT}}{1} = \overline{LT}$

Es decir, el valor de la tangente coincide con lo que mide el segmento $\overline{LT}$, que va desde el punto T(1,0) hasta el punto L, donde la perpendicular por T corta a la prolongación del radio correspondiente al ángulo.

<u>En el segundo cuadrante:</u>



Siguiendo el análogo procedimiento con α del 2º cuadrante:

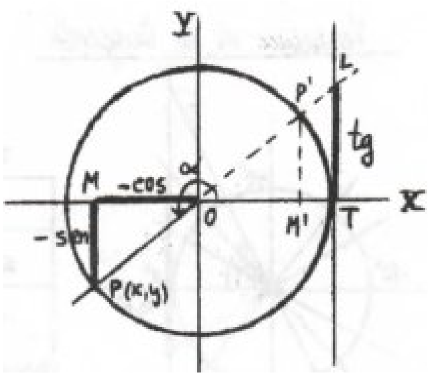
$$sen\alpha = \frac{ordenada\_de\_P}{radio} = \frac{y}{1} = y = \overline{PM}$$

$$\cos\alpha = \frac{abcisa\_de\_P}{radio} = \frac{x}{1} = x = -\overline{OM}$$

$tg\alpha = \frac{ordenada\_de\_P}{abcisa\_de\_P} = \frac{y}{x} = \frac{\overline{PM}}{-\overline{OM}}$ =(por ser iguales el triángulo OMP y el triángulo $OM'P'$)= $\frac{\overline{P'M'}}{-\overline{OM'}}$ = (por el teorema de Tales)=

$$-\frac{\overline{LT}}{\overline{OT}} = -\frac{\overline{LT}}{1} = -\overline{LT}$$

<u>En el tercer trimestre:</u>

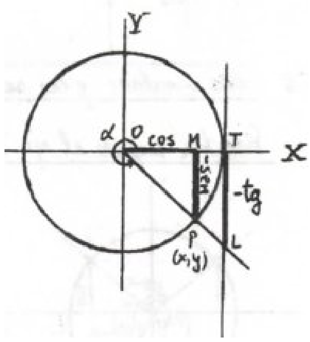


$$sen\alpha = \frac{ordenada\_de\_P}{radio} = \frac{y}{1} = y = -\overline{PM}$$

$$\cos\alpha = \frac{abcisa\_de\_P}{radio} = \frac{x}{1} = x = -\overline{OM}$$

$tg\alpha = \frac{ordenada\_de\_P}{abcisa\_de\_P} = \frac{y}{x} = \frac{-\overline{PM}}{-\overline{OM}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{OM}}$ =(por ser iguales el triángulo OMP y el triángulo $OM'P'$)= $\frac{\overline{P'M'}}{\overline{OM'}}$ = (por el teorema de Tales)=

$$\frac{\overline{LT}}{\overline{OT}} = \overline{LT}$$



<u>En el cuarto cuadrante:</u>

$$sen\alpha = \frac{ordenada\_de\_P}{radio} = \frac{y}{1} = y = -\overline{PM}$$

$$\cos\alpha = \frac{abcisa\_de\_P}{radio} = \frac{x}{1} = x = \overline{OM}$$

$tg\alpha = \frac{ordenada\_de\_P}{abcisa\_de\_P} = \frac{y}{x} = \frac{-\overline{PM}}{\overline{OM}}$ = (por el teorema de Tales)= $-\frac{\overline{LT}}{\overline{OT}} = -\overline{LT}$

RESUMEN:

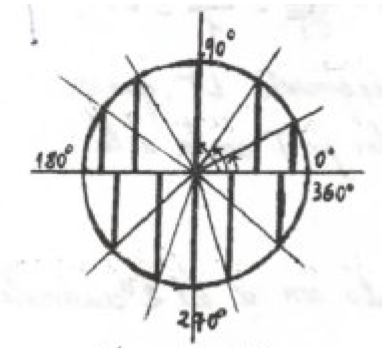
$sen\alpha =$ medida del segmento que va desde P en perpendicular hasta el eje X, con signo + si está por encima del eje X y con signo – si está por debajo.

$\cos\alpha =$ medida del segmento que va desde O hasta el punto M, que es el pie de la perpendicular correspondiente al seno, son signo + si está a la derecha de O y con – si a la izquierda.

$tg\alpha =$ medida del segmento que va desde T(1,0) hasta el punto L, donde la prolongación de $\overline{OP}$ corta a la perpendicular al eje X por T, con signo + por arriba y con signo – si por abajo.

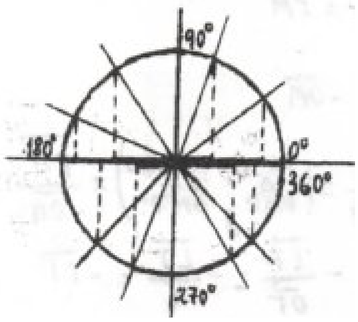
5.7 Variación de las razones trigonométricas en una vuelta.

Variación del seno



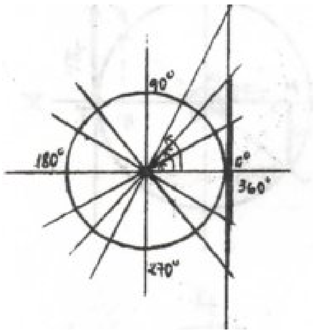
$sen\alpha$	0º	1º cuadr.	90º	2º cuadr.	180º	3º cuadr.	270º	4º cuadr.	360º
Signo		+	+	+		-	-	-	
Valor	0	$0 \to 1$	1	$1 \to 0$	0	$0 \to -1$	-1	$-1 \to 0$	0
comportamiento		creciente		decreciente		decreciente		creciente	

Variación del coseno



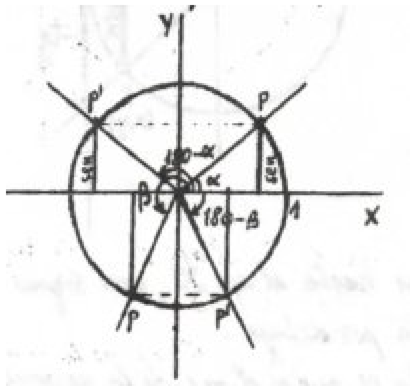
$\cos\alpha$	0º	1º cuadr.	90º	2º cuadr.	180º	3º cuadr.	270º	4º cuadr.	360º
Signo	+	+		-	-	-		+	+
Valor	1	$1 \to 0$	0	$0 \to -1$	-1	$-1 \to 0$	0	$0 \to 1$	1
comportamiento		decreciente		decreciente		creciente		creciente	

Variación de la tangente



$tg\alpha$	0º	1º cuadr.	90º	2º cuadr.	180º	3º cuadr.	270º	4º cuadr.	360º
Signo		+		-		+		-	
Valor	0	$0 \to +\infty$	$\nexists$	$-\infty \to 0$	0	$0 \to +\infty$	$\nexists$	$-\infty \to 0$	0
comportamiento		creciente		creciente		creciente		creciente	

5.8 Las simetrías y las razones trigonométricas.



-Si tenemos un ángulo α, de cualquier cuadrante, en un sistema goniométrico de referencia y realizamos una simetría respecto al eje Y, el punto P de corte con la circunferencia se transforma en otro P´ que corresponde al ángulo que mide 180- α .

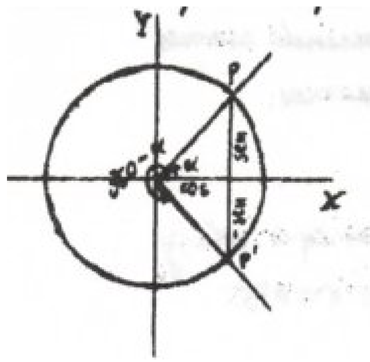
-Observando la figura vemos que:

$$\begin{cases} sen(180-\alpha) = sen\alpha \\ \cos(180-\alpha) = -\cos\alpha \end{cases}$$

Y dividiendo miembro a miembro $\to$ $tg(180-\alpha) = -tg\alpha$

Es decir, al realizar una simetría respecto al eje Y, el ángulo pasa de α a $\to$ $180-\alpha$, el seno no varía y el coseno y la tangente cambian de signo.

Simetría respecto al eje X:



-Si tenemos un ángulo α cualquiera en un sistema goniométrico de referencia y realizamos una simetría respecto al eje X, el punto P de corte con la circunferencia se transforma en otro P´ que corresponde al ángulo que mide $360^{o} - \alpha$.

-Observando la figura vemos que:

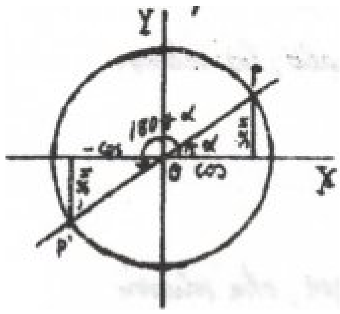
$$\begin{cases} sen(360-\alpha) = -sen\alpha \\ \cos(360-\alpha) = \cos\alpha \end{cases}$$

Y dividiendo miembro a miembro $\to$ $tg(360-\alpha) = -tg\alpha$.

Es decir, al realizar una simetría respecto al eje X, el ángulo pasa de α a $\to$ $360-\alpha$, el coseno no varía y el seno y la tangente cambian de signo.

Simetría respecto al centro de coordenadas:

-Si tenemos un ángulo α cualquiera y realizamos una simetría respecto al centro de coordenadas (prolongando el radio por O), el punto P de corte con la circunferencia se transforma en otro P´ que corresponde al ángulo que mide $180^{\circ}+\alpha$.



-Observando la figura vemos que:

$$\begin{cases} sen(180+\alpha) = -sen\alpha \\ \cos(180+\alpha) = -\cos\alpha \end{cases}$$

Y dividiendo miembro a miembro $\rightarrow$ $tg(180+\alpha) = tg\alpha$

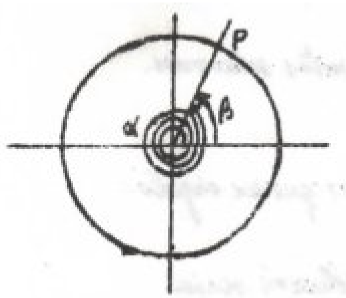
Es decir, al realizar una simetría respecto al centro de coordenadas, el ángulo pasa de α a $\rightarrow$ $180+\alpha$, la tangente no varía y el seno y el coseno cambian de signo.

5.9 Razones trigonométricas de ángulos mayores que una vuelta.

Dado un ángulo α mayor de una vuelta, después de realizar uno o varios giros completos, el lado del ángulo quedará en un cierto cuadrante y producirá el punto P de corte.

Si hacemos la división entera

$$\begin{array}{l|l} \alpha & 360 \\ \cline{2-2} \beta & n \end{array}$$



Obtenemos un resto β tal que $\alpha = 360^{\circ} \cdot n + \beta$. El ángulo β producirá el mismo punto de corte P que el α pero sin dar las vueltas. Como las razones trigonométricas de un ángulo sólo dependen de las coordenadas de ese punto P, se cumplirá:

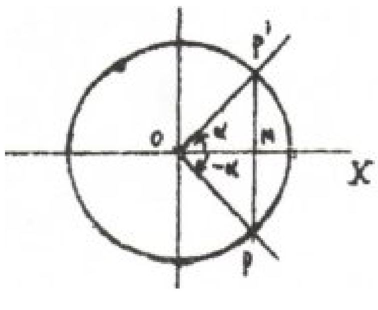
$sen\alpha = sen\beta$

$sen\alpha = \cos\beta$

$tg\alpha = tg\beta$

5.10 Razones trigonométricas de ángulos negativos.

Dada un ángulo negativo $-\alpha$, si realizamos una simetría respecto al eje X, se obtiene otro ángulo positivo α como en la figura. Teniendo en cuenta la igualdad de los triángulos PMO y P´MO, tenemos:



$sen(-\alpha) = -sen\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

Y dividiendo miembro a miembro $tg(-\alpha) = -tg\alpha$.

6. ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS.

Llamamos así a las ecuaciones en las que sobre las incógnitas aparecen operando razones trigonométricas. Vamos a aprender a resolver algunos tipos sencillos de estas ecuaciones.

6.1 Ecuaciones trigonométricas simples.

-Son las que tienen en un miembro una razón trigonométrica de una expresión en x sola, y en otro un número. Por ejemplo:

$sen(x)=\frac{1}{2}$; $tg(2x+1)=-2$; $\cos(x)=0,75$

-Para resolver una ecuación de estas debemos:

1º) Saber usar la calculadora para obtener un ángulo conociendo su seno, coseno o tangente.

2º) Saber que en una vuelta puede haber otro ángulo que de el mismo valor para el seno, el coseno o la tangente.

3º) Saber que al sumar o restar un número cualquiera de vueltas a un ángulo, los valores de las razones trigonométricas se mantienen invariables.

<u>Ejemplo 1:</u> Resuelve tg x=-1

-Mediante la calculadora averiguamos que x puede ser -45º.

-Como la tangente se mantiene al realizar una simetría respecto al origen, otra solución sería $x=180^{o}+(-45^{o})=135^{o}$

-Sumando un número cualquiera de vueltas también salen ángulos cuya tangente vale -1. Por tanto todas las soluciones serían:

$x=\begin{cases}-45^{o}+360^{o}k\\135^{o}+360^{o}k\end{cases}$ o en radianes $x=\begin{cases}-\frac{\pi}{4}+2\pi k\\ \frac{3\pi}{4}+2\pi k\end{cases}$

Donde k podría ser cualquier número entero. Tenemos, por tanto, infinitas soluciones

<u>Ejemplo 2:</u> Resuelve: $sen(2x+28^{o})=\frac{1}{2}$

-Mediante la calculadora, ó porque lo sepamos de memoria, averiguamos que un ángulo cuyo seno vale $\frac{1}{2}$ es el de 30º.

-Como el seno no varía al realizar una simetría respecto al eje y, otra solución sería que (2x+28º) fuera 180º-30º=150º.

-Sumando un número cualquiera de vueltas tendríamos:

$$2x+28^{o}=\begin{cases}30^{o}+360^{o}k\\150^{o}+360^{o}k\end{cases}$$ y despejando $\rightarrow$

$$2x=\begin{cases}30^{o}+360^{o}k-28^{o}=2^{o}+360^{o}k\\150^{o}+360^{o}k-28^{o}=122^{o}+360^{o}k\end{cases}\rightarrow x=\begin{cases}\dfrac{2^{o}+360^{o}k}{2}\\\dfrac{122^{o}+360^{o}k}{2}\end{cases}\rightarrow$$

$$x=\begin{cases}1^{o}+180^{o}k\\61^{o}+180^{o}k\end{cases}\quad\forall k\in\mathbb{Z}$$

6.2 Ecuaciones trigonométricas reducibles a simples.

6.2.1 Despejando.

Ejemplo)

Resuelve $1-4\cos x=4$

1º) Despejando $\cos x$:

$$-4\cos x=4-1\rightarrow -4\cos x=3\rightarrow \cos x=\frac{-3}{4}\rightarrow \cos x=-0,75$$

2º) Resolvemos esta ecuación simple que ha quedado:

-La calculadora nos da un posible valor de x $\rightarrow$(138,59º) aprox.

-Como el coseno se mantiene al realizar una simetría respecto al eje x, otra solución sería: x=360º-(138,59)º=(221´41)º aprox.

- Y añadiendo vueltas:

$$x=\begin{cases}138,59^{o}+360^{o}k\\221,41^{o}+360^{o}k\end{cases}\quad\forall k\in\mathbb{Z}$$

6.2.2 Por sustitución o cambio de incógnitas.

Ejemplo)

Resuelve: $1+2sen^{2}x=3senx$

1º) Llamando t a senx y la ecuación se convierte en $1+2t^{2}=3t$

2º) Resolviendo esta ecuación en t

$$2t^{2}-3t+1=0\ \rightarrow\ t=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\begin{cases}\dfrac{3+1}{4}=1\\\dfrac{3-1}{4}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

3º) Como $t=senx$ tendríamos:

$senx=1$

-la calculadora nos da que x=90º

-la simetría respecto al eje y nos da

$180^{o}-90^{o}=90^{o}$

-añadiendo vueltas $\boxed{x=90^{o}+360^{o}k}$

ó

$senx=\frac{1}{2}=0,5$

-la calculadora nos da x=30º

-la simetría respecto al eje y nos da

$180^{o}-30^{o}=150^{o}$

-añadiendo vueltas

$$\boxed{x=\begin{cases}30^{o}+360^{o}k\\150^{o}+360^{o}k\end{cases}\quad\forall k\in\mathbb{Z}}$$

6.2.3. Por factorización.

Ejemplo)

Resuelve $5\cos^2 x - 3\cos x = 0$

1º) Sacando factor común $\cos x(5\cos x - 3) = 0$

2º) Del producto igual a cero resulta que

ó

$\cos x = 0$

-la calculadora nos da x=90º

-la simetría respecto al eje x nos da 360º-90º=270º

-añadiendo vueltas

$$\boxed{x = \begin{cases} 90^{\circ} + 360^{\circ} k \\ 370^{\circ} + 360^{\circ} k \end{cases}}$$

$5\cos x - 3 = 0$

$5\cos x = 3$

$\cos x = \frac{3}{5} = 0,6$

-la calculadora nos da $x \approx (53,13)^{\circ}$

-la simetría respecto al eje x no da $360^{\circ} - (53,13)^{\circ} = 306,87^{\circ}$

-añadiendo vueltas

$$\boxed{x \approx \begin{cases} (53,13)^{\circ} + 360^{\circ} k \\ (306,87)^{\circ} + 360^{\circ} k \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{Z}}$$

7. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

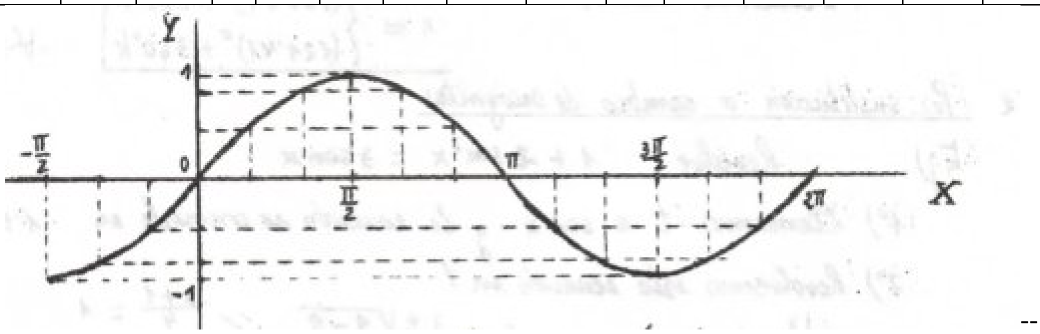
Llamamos así a las funciones en las que, sobre la variable independiente x, aparecen actuando una ó más razones trigonométricas. Vamos a utilizar las tres básicas:

$f(x) = senx$; $f(x) = \cos x$; $f(x) = tgx$

7.1 y= Sen x

-Calculamos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

x (en rad.)	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	...
y	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	...



--

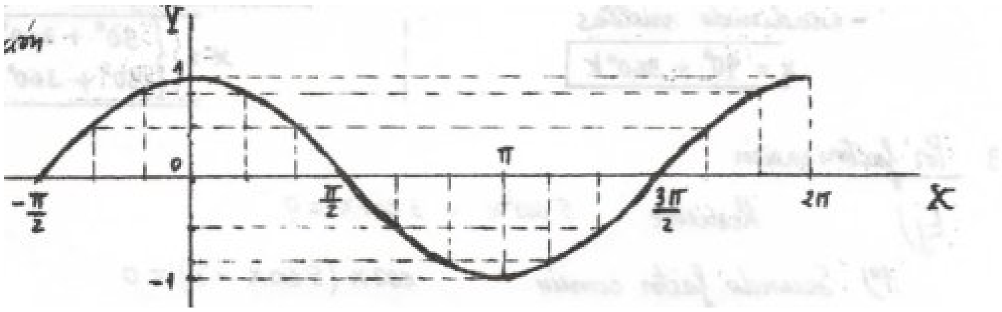
Esta gráfica recibe el nombre de SINUSOIDE y algunas características son:

• Su dominio es todo ℝ • Es continua en todo ℝ se repite continuamente	• Su recorrido es el intervalo $[-1,1]$ • Es periódica en de periodo 2π, es decir, cada 2π radianes. • Es simétrica respecto al centro de coordenadas.

7.2 y= Cos x

-Calculamos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

x (en rad.)	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	…
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	…



-Esta gráfica recibe el nombre de COSINUSOIDE y algunas características son:

- Las mismas señaladas para la sinusoide salvo que la simetría es respecto al eje y.
- También difiere de la sinusoide en los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los cortes con los ejes.

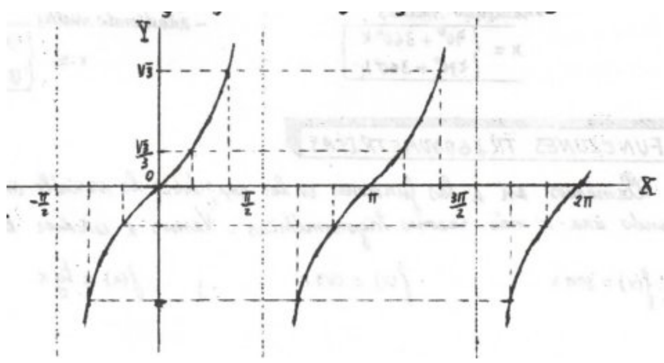
7.3 y=tan x

-Calculamos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función, que recibe el nombre de TANGENTOIDE.

x (en rad.)	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	…
y	$\nexists$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\nexists$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\nexists$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	…

-Alguna de las características suyas son:

- No está definida en $x = k\frac{\pi}{2}$ con k impar
- Es periódica de periodo π
- Su recorrido en todo ℝ
- Es simétrica respecto el centro de coordenadas.



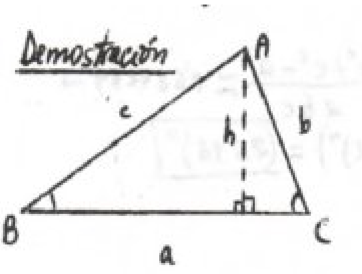
8. TEOREMAS DEL SENO Y COSENO

8.1 Teorema del seno

En todo triángulo se cumple:

$$\boxed{\frac{a}{senA}=\frac{b}{senB}=\frac{c}{senC}\ (1)}$$

Demostración:



Si colocamos el lado en posición horizontal y dibujamos la altura correspondiente a ese lado, se forman dos triángulos rectángulos y en ellos se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} senB=\dfrac{h}{c} \\ senC=\dfrac{h}{b}\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} h=csenB \\ h=bsenC\end{array}\right\} \rightarrow\ bsenC=csenB\ \rightarrow$$

$$\frac{b}{senB}=\frac{c}{senC}\ (2)$$

Trazando la altura sobre el lado c y actuando análogamente obtendremos

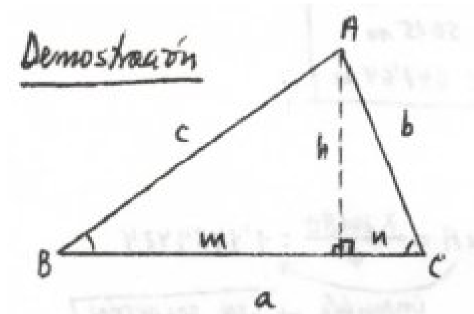
$\dfrac{a}{senA}=\dfrac{b}{senB}$ (3) que junto con (2) producen (1).

8.2 Teorema del coseno

En todo triángulo se cumple:

$$\boxed{\begin{array}{l} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2=a^2+c^2-2ac\cos B \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\end{array}}$$

Demostración:



Dibujando la altura correspondiente a un lado, se forman dos triángulos rectángulos y en ellos se cumple:

$$\begin{cases} b^2=h^2+n^2 \rightarrow h^2=b^2-n^2(1) \\ \cos C=\dfrac{n}{b} \rightarrow n=b\cos C(2) \\ m+n=a \rightarrow m=a-n(3)\end{cases}$$

$c^2=h^2+m^2=$ (por (1) y (3))= $b^2-n^2+(a-n)^2=b^2-\cancel{n}^2+a^2+\cancel{n}^2-2an'=$(por (2)= $a^2+b^2-2ab\cos C$

Análogamente se demuestran las otras dos igualdades.

9. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CUALESQUIERA.

Para resolver un triángulo cualquiera necesitamos conocer un mínimo de tres de sus elementos, siendo uno de ellos un lado. Para hacerlo usaremos los teoremas del seno y el coseno, además del hecho de que la suma de los ángulos debe ser 180º. No hay un único procedimiento. Veamos algunos ejemplos:

9.1 Conocidos dos ángulos y un lado.

Datos: c=63m ; $\hat{B}=42^{\circ}$; $\hat{A}=83^{\circ}$

Resolución: $\hat{C}=180^{\circ}-(\hat{A}+\hat{B})=180^{\circ}-125^{\circ}=55^{\circ}$

Aplicandoel teorema del seno $\rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{senA}=\dfrac{c}{senC}\rightarrow \dfrac{a}{sen83^{\circ}}=\dfrac{63}{sen55^{\circ}} \\ \dfrac{b}{senB}=\dfrac{c}{senC}\rightarrow \dfrac{b}{sen42^{\circ}}=\dfrac{63}{sen55^{\circ}} \end{cases} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{63sen83^{\circ}}{sen55^{\circ}}\approx 76,34m \\ b=\dfrac{63sen42^{\circ}}{sen55^{\circ}}\approx 51,46m \end{cases}$$

9.2 Conocidos dos lados y el ángulo que forman.

Datos: $a=1200m$; $c=700m$; $\hat{B}=108^{\circ}$

Resolución:

$$\begin{cases} b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\hat{B}=1200^2+700^2-2\cdot1200\cdot700\cdot\cos108^{\circ}\approx 2449148,5 \\ b\approx\sqrt{2449148,5}\approx 1564,98m \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\rightarrow 2bc\cos A=b^2+c^2-a^2\rightarrow \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\approx 0,684239 \end{cases}$$

$$\rightarrow \hat{A}=\arccos 0,684239\approx(46,82)^{\circ}$$

$$\hat{C}=180^{\circ}-(108^{\circ}+(46,82)^{\circ})=(25,18)^{\circ}$$

9.3 Conocidos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

Datos: $a=3500m$; $b=3000m$; $B=36^{\circ}$

Resolución:

$$\frac{a}{senA}=\frac{b}{senB}\rightarrow\frac{3500}{senA}=\frac{3000}{sen36^{\circ}}\rightarrow senA=\frac{3500sen36^{\circ}}{3000}\approx 0,6857494\rightarrow$$

$$\rightarrow A\approx\left\langle \begin{array}{l} (43,29)^{\circ}\rightarrow C=180^{\circ}-(36-43,29)=100,71^{\circ} \\ 180-(43,29)^{\circ}=136,71^{\circ}\rightarrow C=180-(36+136,71)=(7,29)^{\circ} \end{array}\right.$$

$$\frac{c}{senC}=\frac{b}{senB}\rightarrow\begin{cases}\dfrac{c}{sen100,71^o}=\dfrac{3000}{sen36^o}\rightarrow c\approx\dfrac{3000sen(100,71)}{sen36}\approx 5015m\\ \dfrac{c}{sen(7,29)^o}=\dfrac{3000}{sen36^o}\rightarrow c\approx\dfrac{3000sen(7,29)}{sen36}\approx 647,64m\end{cases}$$

Dos soluciones: $\rightarrow\begin{cases}\hat{A}\approx(43,29)^o\,\hat{C}\approx(100,71)^o;c\approx 5015m\\ \hat{A}\approx(136,71)^o\,\hat{C}\approx(7,29)^o;c\approx 647,64m\end{cases}$

Datos:

$a=7m$; $b=6m$; $\hat{B}=80^o$

$$\frac{a}{senA}=\frac{b}{senB}\rightarrow\frac{7}{senA}=\frac{6}{sen80^o}\rightarrow senA=\frac{7\cdot sen80^o}{6}=1,1489424\rightarrow senA=1,1489424$$

Imposible sin solución.

9.4 Conocidos los tres lados.

Datos:

$a=8m$; $b=6m$; $c=5m$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A\rightarrow 64=36+25-60\cdot\cos A\rightarrow\cos A=\frac{36+25-64}{60}\rightarrow$$

$$\rightarrow b^2=a^2+c^2-2ac\cos\hat{B}\rightarrow 36=64+25-80\cos\hat{B}\rightarrow\cos\hat{B}=\frac{64+25-36}{80}=0,6625$$

$$\rightarrow B\approx(48,51)^o$$

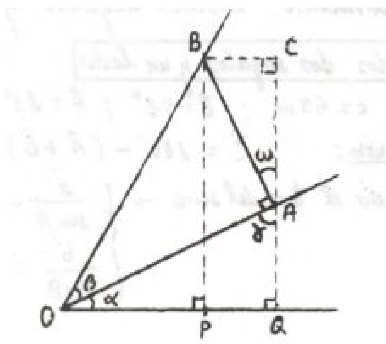
$$\hat{C}=180^o-(92,87+48,51)=(38,62)^o$$

10. FÓRMULAS DE ADICIÓN

10.1 Razones trigonométricas de $\alpha+\beta$

Vamos a calcular las razones trigonométricas del angulo ($\alpha+\beta$) a partir de α y β.

Comenzamos por colocar los ángulos uno a continuación del otro y realizamos la construcción de la figura.



El ángulo α es igual que ω por que:

a) El triángulo $\triangle ABC\rightarrow\alpha+\gamma+90^o=180^o\rightarrow\alpha=180^o-\gamma-90^o$

b) Por formar un ángulo llano $\rightarrow\omega+\gamma+90^o=180^o\rightarrow\omega=180^o-\gamma-90^o$

De donde se tiene que: $\alpha = \omega$

- En el triángulo rectángulo
  $\triangle OPB \rightarrow sen(\alpha+\beta) = \dfrac{\overline{BP}}{\overline{OB}}; \cos(\alpha+\beta) = \dfrac{\overline{OP}}{\overline{OB}}$
- En el triángulo rectángulo $\triangle ACB \rightarrow sen\alpha = sen\omega = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}; \cos\alpha = \cos\omega = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$
- En el triángulo rectángulo
  $\triangle OAB \rightarrow sen\beta = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{OB}}; \cos\beta = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$

Veamos que (1)

$$\boxed{sen(\alpha+\beta) = sen\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot sen\beta}$$

$$sen(\alpha+\beta) = \frac{\overline{AQ}}{\overline{OA}}\cdot\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} + \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\cdot\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AQ}+\overline{AC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{OB}} = sen(\alpha+\beta)$$

Veamos que

(2)

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - sen\alpha\cdot sen\beta}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OA}}\cdot\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} - \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\cdot\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OQ}-\overline{BC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OB}} = \cos(\alpha+\beta)$$

Veamos que

(3)
$$\boxed{tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\cdot tg\beta}}$$

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{sen(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{sen\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot sen\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta - sen\alpha\cdot sen\beta} =$$

$$= \frac{\dfrac{sen\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} + \dfrac{sen\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} - \dfrac{sen\alpha\cdot sen\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}} = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\cdot tg\beta}$$

10.2 Razones trigonométricas de $\alpha-\beta$

Expresando la diferencia como suma $\alpha-\beta = \alpha+(-\beta)$, utilizando las fórmulas (1), (2) y (3) y lo que ya sabemos de las razones trigonométricas de los ángulos negativos:

$$sen(\alpha-\beta) = sen(\alpha+(-\beta)) = sen\alpha\cdot\cos(-\beta) + \cos\alpha\cdot sen(-\beta) = sen\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot s$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha+(-\beta)) = \cos\alpha\cdot\cos(-\beta) - sen\alpha\cdot sen(-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + sen\alpha\cdot s$$
$$tg(\alpha-\beta) = tg(\alpha+(-\beta)) = \frac{tg\alpha + tg(-\beta)}{1 - tg\alpha\cdot tg(-\beta)} = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\cdot tg\beta}$$

10.3 Razones trigonométricas del ángulo doble.

Haciendo $\alpha = \beta$ en las fórmulas (1), (2) y (3) obtenemos:

$sen(\alpha+\alpha) = sen\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\alpha \cdot sen\alpha \rightarrow$	$sen(2\alpha) = 2 \cdot sen\alpha \cdot \cos\alpha$
$\cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - sen\alpha \cdot sen\alpha \rightarrow$	$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$
$tg(\alpha+\alpha) = \dfrac{tg\alpha + tg\alpha}{1 - tg\alpha \cdot tg\alpha} \rightarrow$	$tg(2\alpha) = \dfrac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

10.4 Razones trigonométricas del ángulo mitad.

Partiendo de las fórmulas $\begin{cases} sen^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) + \cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = 1 \\ \cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) - sen^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \cos 2 \cdot \left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \cos\alpha \end{cases}$

Sumando miembro a miembro $\rightarrow 2\cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = 1 + \cos\alpha \rightarrow$

Restando miembro a miembro $\rightarrow 2sen^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = 1 - \cos\alpha \rightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}} \\ sen\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}} \\ tg\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) == \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \end{array}}$$

$$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{sen\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}}{\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

10.5 Suma y diferencia de senos y cosenos.

Sean dos ángulos A y B. Formamos su semisuma y su semidiferencia $a = \dfrac{A+B}{2}$,

$b = \dfrac{A-B}{2}$ y se cumple que a+b=A y a-b=B

Tendremos:

Sumando (1)+(2) obtendremos:

Restando (1)-(2) obtendremos:

Sumando (3)+(4) obtendremos:

Restando (3)-(4) obtendremos:

$$\begin{cases} senA = sen(a+b) = sena \cdot \cos b + \cos a \cdot senb (1) \\ senB = sen(a-b) = sena \cdot \cos b - \cos a \cdot senb (2) \\ cosA = \cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - sena \cdot senb (3) \\ \cos B = \cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + sena \cdot senb (4) \end{cases}$$

$$senA+senB=2sena\cdot\cos b=2\cdot sen\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$senA-senB=2\cos a\cdot senb=2\cdot\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)sen\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$\cos A+\cos B=2\cos a\cdot\cos b=2\cdot\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$\cos A-\cos B=-2sena\cdot senb=-2sen\left(\frac{A+B}{2}\right)sen\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

11. OTRAS ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS.

Utilizando las fórmulas de adición junto con los métodos vistos en 6.2 podemos reducir a simples otros tipos de ecuaciones:

Ejemplo:

Resuelve $tg2x=-tgx$

-Aplicando la fórmula de la tangente del ángulo doble $\rightarrow \dfrac{2tgx}{1-tg^2x}=-tgx$

-Llamamos t a la tgx y la ecuación se convierte en $\rightarrow \dfrac{2t}{1-t^2}=-t$

-Resolvemos esta ecuación:

$$2t=-t(1-t^2)\rightarrow 2t+t(1-t^2)=0\rightarrow t(2+1-t^2)=0\rightarrow$$
$$\rightarrow t\cdot(3-t^2)=0\rightarrow\begin{cases}t=0\\ 3-t^2=0\rightarrow t^2=3\rightarrow t\begin{cases}+\sqrt{3}\ ç\\ -\sqrt{3}\end{cases}\end{cases}$$

-Como $t=tgx$ tendremos:

$tgx=0$
$$x=\begin{cases}0^\circ+360^\circ k\\ 180^\circ+360^\circ k\end{cases}$$

$tgx=\sqrt{3}$
$$x=\begin{cases}60^\circ+360^\circ k\\ 240^\circ+360^\circ k\end{cases}$$

$tgx=-\sqrt{3}$
$$x=\begin{cases}-60^\circ+360^\circ k\\ 120^\circ+360^\circ k\end{cases}$$

$\forall k\in\mathbb{Z}$